

Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

20 - Rango

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Consiglio

1. Introduzione

Abbiamo visto come il determinante caratterizzi le matrici quadrate evidenziando, ad esempio, la proprietà di invertibilità.

Una quantità che è associata a matrici qualsiasi (anche non quadrate), e che ha una qualche similitudine con il determinante, è il *Rango*.

Per definire il rango di una matrice non quadrata è necessario prima generalizzare il concetto di *minore di ordine k* ad una matrice non quadrata.

1.1. Definizione di Minore (per matrici non quadrate). Sia A una matrice $m \times n$. Si definisce minore di ordine k di A , con $k \leq \min(m, n)$ il determinante di qualsiasi sottomatrice di A ottenuta rimuovendo $m - k$ righe e $n - k$ colonne.

Esistono diverse definizioni di *rango di una matrice*. Una delle più comuni è la seguente.

1.2. Definizione di Rango (I). Sia A una matrice $m \times n$. Si definisce *rango di A* e si indica con $\text{rank}(A)$, il massimo ordine fra i minori diversi da zero di A .

Esempio 1.1

Determinare il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}.$$

Essendo il rango di A il massimo ordine tra i minori diversi da zero di A , non è necessario calcolare tutti i minori di A . E' sufficiente partire dai minori di ordine maggiore di A e se fra questi ve ne è uno diverso da zero possiamo terminare l'esplorazione. In caso contrario, invece, è necessario calcolare i minori di un ordine inferiore, e così via. Innanzitutto possiamo escludere che il rango della matrice sia uguale a 4. Infatti, essendo il rango l'ordine di uno dei minori estraibili da A , non vi sono minori di ordine 4 estraibili da A . Le sub-matrici di ordine 3 sono:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}.$$

Lo studente può verificare che i determinanti di tali sub-matrici sono tutti nulli. Quindi è necessario esplorare i minori di ordine 2. In questo caso, si verifica facilmente che il minore $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Questo basta a garantire che $\text{rank}(A) = 2$.

E' evidente che usare semplicemente questa definizione per calcolare il rango di una matrice può risultare molto complicato per matrici di una certa dimensione. Vediamo se è possibile trovare una procedura più efficiente.

Si consideri la seguente matrice:

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc|c} \mathbf{2} & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{array} \right].$$

Si noti che gli elementi al di sopra della linea *non* sono tutti nulli. In particolare sono non nulli gli elementi che delimitano (immediatamente sopra) la linea tratteggiata. Tale forma *a scala* permette di identificare immediatamente il minore (di ordine maggiore) diverso da zero. In particolare, gli elementi in “grassetto” sono i primi elementi diversi da zero di ogni riga. Le colonne cui appartengono questi elementi formano una sotto-matrice *triangolare* di A di ordine 3 il cui determinante è diverso da zero per costruzione (sono stati presi i primi elementi diversi da zero di ogni riga). In questo caso, sarà dunque $\text{rank}(B) = 3$.

Nel caso di matrici *quadrato* triangolari, come, ad esempio, la matrice

$$C = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{-1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

tale forma è più evidente e permette, allo stesso modo, di identificare facilmente l'ordine del massimo minore diverso da zero. Nel merito della matrice C , il minore di ordine 4 è palesemente 0. Infatti esso coincide con $|C|$ in cui tutti gli elementi dell'ultima riga sono nulli. Il minore di ordine 3 ottenuto eliminando da C la colonna 2 e la riga 4 (si osservi che *nessuno* degli elementi in “grassetto” appartiene alla colonna 2 o alla riga 4) è pari a -1 . Quindi $\text{rank}(C) = 3$.

Questi esempi ci permettono di concludere che se possiamo trasformare una matrice in una forma triangolare, o, in generale, in una forma a scala, la determinazione del rango della matrice è immediata. Le operazioni elementari per riga definite in precedenza assolvono perfettamente a tale compito. Vediamo alcune definizioni.

1.3. Definizione di Matrice in Forma a Scala per Riga. Una matrice $E_{m \times n}$ si dice essere in *forma a scala per riga* (in inglese *Row Echelon Form*) se le seguenti condizioni sono verificate:

- (1) Se la riga $E_{i\star}$ è composta da elementi tutti nulli, allora tutte le righe sottostanti, ovvero ogni $E_{k\star}$ con $k = i + 1, i + 2, \dots, m$, sono composte da elementi tutti nulli.

- (2) se il primo elemento diverso da zero della riga E_{i*} si trova nella j -esima colonna, allora tutti gli elementi delle righe successive che si trovano nelle colonne $E_{*1}, E_{*2}, \dots, E_{*j}$ sono uguali a zero.

Il primo elemento diverso da zero di ogni riga è detto *elemento pivot*. Le colonne corrispondenti a quelle dove si trovano gli elementi pivot sono dette *colonne basiche*. Tutte le altre colonne si dicono *non-basiche*.

Le due condizioni sopra enunciate definiscono matrici in cui gli elementi *diversi da zero* si trovano sulle, o sopra, la linea a gradini che parte dall'angolo in alto a sinistra e scende fino all'angolo in basso a destra di una matrice. Una struttura tipica di una matrice in forma a scala per riga è illustrata di seguito, dove gli elementi pivot sono indicati con il simbolo “●” e gli elementi indicati con “★” possono essere diversi da 0.

$$E_{6 \times 7} = \begin{bmatrix} \bullet & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \bullet & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Come si può notare, le colonne cui appartengono gli elementi pivot, cioè le colonne basiche, individuano il minore diverso da zero di ordine maggiore. Tale minore è associato ad una sotto-matrice 4×4 di forma triangolare.

Si noti, inoltre, che, data l'arbitrarietà con cui possiamo ottenere una matrice in forma a scala per riga E a partire da una matrice A , gli elementi di E *non* sono univocamente determinati da A . Invece è unicamente determinata da A la posizione degli elementi pivot.

In altri termini, partendo da A , tramite la riduzione di Gauss per mezzo di operazioni per riga, possiamo ottenere due matrici in forma a scala per riga aventi elementi diversi da zero differenti. Esse avranno, invece, lo stesso numero di elementi pivot e nella stessa posizione. Tale numero è il rango di A (e di E). Una definizione alternativa di rango di una matrice che tiene conto di tali aspetti è la seguente.

1.4. Definizione di Rango (II). Sia A una matrice $m \times n$ ed $E_{m \times n}$ una sua riduzione in forma a scala per riga. Le tre seguenti espressioni definiscono in modo equivalente il rango di A :

- $rank(A)$ = numero di elementi pivot di E .
- $rank(A)$ = numero di righe non nulle di E .
- $rank(A)$ = numero di colonne basiche di E .

Esempio 1.2

Determinare il rango della seguente matrice e identificare le colonne basiche.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Utilizziamo il processo di riduzione di Gauss per determinare una riduzione in forma a scala per riga di A : $E = \text{ref}(A)$ (la notazione $\text{ref}(A)$ è usata come acronimo di “Row Echelon Form”):

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = E \end{aligned}$$

Quindi $\text{rank}(A) = 2$ e le colonne basiche sono quelle di A che corrispondono agli elementi pivot: $A_{\star 1}$ e $A_{\star 4}$.

Si osservi che, per esempio, avremmo potuto utilizzare un’operazione elementare per riga di tipo II nella seconda matrice intermedia (l’ultima prima di ottenere E nel processo di riduzione precedente) dividendo la seconda riga per 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{R_2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1/3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = E^I$$

Come si può notare, sebbene l’elemento pivot $e_{24}^I = 1/3$ di E^I abbia un valore diverso dall’elemento pivot $e_{24} = 1$ di E , la posizione degli elementi pivot in E ed E^I , e più in generale la struttura di queste due matrici, è la stessa.

TEOREMA 1.1 (Proprietà del Rango).

Sia $A_{m \times n}$ una matrice. Allora:

- a:** $\text{rank}(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$ (matrice nulla);
- b:** $\text{rank}(A) \leq \min(m, n)$;
- c:** $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$.

Si lascia allo studente la dimostrazione di queste proprietà.

Una matrice in forma a scala per riga può essere ulteriormente ridotta in modo che ogni elemento pivot sia pari ad 1 e tutti gli elementi sopra di esso siano pari a 0. Tale processo è noto come *riduzione di Gauss-Jordan*. Come visto, nel caso di *matrici invertibili* la riduzione di Gauss-Jordan produce una matrice identità dello stesso ordine della matrice di partenza. Nel caso di matrici non invertibili, o, più in generale, di matrici rettangolari di dimensione $m \times n$, la matrice prodotta dal processo di riduzione sarà composta da un insieme di colonne che identificano una matrice identità di ordine minore o uguale a $\min(m, n)$, e dall'insieme di colonne restanti con elementi determinati dal processo di riduzione.

Esempio 1.3

Riduzione di una matrice in forma a scala per riga. Ridurre secondo Gauss-Jordan la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Trasformiamo prima la matrice in forma a scala per riga:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -\frac{R_2}{2} \\ R_3 \rightleftharpoons R_4 \end{array}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

che è una matrice in forma a scala per riga. Gli elementi pivot sono riportati in “grassetto”. Quindi il rango della matrice è pari a 3 e le colonne basiche sono A_{*1} , A_{*3} e A_{*5} .

1.5. Definizione di Matrice in Forma a Scala per Riga Ridotta. Una matrice $E_{m \times n}$ si dice essere in *forma a scala per riga*

ridotta (Reduced Row Echelon Form) se le seguenti condizioni sono verificate:

- (1) La matrice E è in forma a scala per riga;
- (2) Gli elementi pivot sono pari ad 1;
- (3) Tutti gli elementi sopra i pivot sono nulli.

Esempio 1.4

Riduzione di una matrice in forma a scala per riga ridotta. Nell'esempio precedente abbiamo ridotto la matrice A ad una matrice E in forma a scala per riga:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

Continuando la riduzione della matrice E si ottiene:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3/3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_A$$

La matrice E_A è in *forma a scala per riga ridotta*.

Una struttura tipica di una matrice in forma a scala per riga ridotta è illustrata di seguito, dove gli elementi indicati con $\star$ possono *anche* essere degli zeri. Indicheremo una matrice in forma a scala per riga ridotta ottenuta da una matrice A con $E_A = rref(A)$.

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & \star \\ 0 & 1 & \star & \star & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Come affermato in precedenza, una matrice E in forma a scala ha una struttura unica, ma, a seconda delle operazioni riga effettuate, gli elementi di E possono differire. Al contrario una matrice E_A in forma a scala per riga ridotta è *univocamente* determinata dagli elementi di A . In altri termini, E_A *non* dipende dallo schema di riduzione utilizzato. La determinazione di una E è sufficiente per gli utilizzi pratici e più efficiente dal punto di vista computazionale. Tuttavia, l'unicità di E_A la rende utile dal punto di vista teorico.

1.6. Definizione di matrice a rango pieno. Una matrice $A_{m \times n}$ si dice *a rango pieno* (full rank) se $\text{rank}(A) = \min(m, n)$.

TEOREMA 1.2. *Sia A una matrice quadrata di ordine n . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (a): A è invertibile;
- (b): $\text{rank}(A) = n$ (A ha rango pieno);
- (c): $|A| \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Questo teorema si dimostra provando che (a) $\Rightarrow$ (b); (b) $\Rightarrow$ (c); (c) $\Rightarrow$ (a).

- **(a) $\Rightarrow$ (b).** Questa implicazione segue dal fatto che se A è invertibile allora esiste una riduzione di Gauss-Jordan che trasforma A nella matrice identità di ordine n . Quindi $\text{rank}(A) = \text{rank}(I_n) = n$.
- **(b) $\Rightarrow$ (c).** Se $\text{rank}(A) = n$ allora ogni riga contiene un elemento pivot e la forma a scala per riga coincide con la forma triangolare. Quindi il determinante di A è il prodotto degli elementi pivot, a meno di fattori moltiplicativi (diversi da zero e dovuti ad operazioni per riga di tipo I e II). Essendo gli elementi pivot diversi da zero per definizione sarà $|A| \neq 0$.
- **(c) $\Rightarrow$ (a).** Si veda il teorema sull'invertibilità discusso in precedenza

□

Si osservi la matrice A considerata negli esempi precedenti e riportata di seguito per comodità di lettura:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Si noterà facilmente che la seconda colonna si può ottenere moltiplicando la prima colonna per 2, $A_{*2} = 2A_{*1}$. Meno evidente è la relazione che lega la colonna 4 alle colonne 1 e 3. Si ha che $A_{*4} = 2A_{*1} + A_{*3}$. Vedremo come la matrice in forma a scala per riga ridotta di A , E_A , permette di individuare, se esistono, tali relazioni.

1.7. Definizione di Combinazione Lineare. Sia A una matrice $m \times n$. Diremo che la colonna A_{*j} è combinazione lineare delle k colonne, $A_{*b_1}, A_{*b_2}, \dots, A_{*b_k}$, se esistono k numeri reali, $\mu_{b_1}, \dots, \mu_{b_k}$, tali che

$$A_{*j} = \mu_{b_1} A_{*b_1} + \mu_{b_2} A_{*b_2} + \dots + \mu_{b_k} A_{*b_k}.$$

TEOREMA 1.3. *Sia $A_{m \times n}$ una matrice ed $E_A = \text{rref}(A)$. Sia, inoltre, E_{*j} una colonna non-basica di E_A . Allora è possibile esprimere*

$E_{\star j}$ come combinazione lineare delle k colonne basiche, $E_{\star b_1}, \dots, E_{\star b_k}$, che stanno alla sinistra di $E_{\star j}$:

$$E_{\star j} = \mu_1 E_{\star b_1} + \dots + \mu_k E_{\star b_k} = \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \mu_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove $\mu_1, \dots, \mu_k$ sono i primi k elementi di $E_{\star j}$.
 La stessa relazione vale per le colonne di A . In particolare, siano $A_{\star b_1}, \dots, A_{\star b_k}$ le colonne basiche di A a sinistra di $A_{\star j}$, allora

$$A_{\star j} = \mu_1 A_{\star b_1} + \dots + \mu_k A_{\star b_k},$$

dove $\mu_1, \dots, \mu_k$ sono i primi k elementi di $E_{\star j}$.

Esempio 1.5

Si scriva ogni colonna non basica di A come combinazione lineare delle colonne basiche di A , dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Lo studente usi il processo di riduzione di Gauss-Jordan e verifichi che

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

La colonna E_{*3} si può scrivere come combinazione lineare delle due colonne basiche E_{*1} e E_{*2} alla sua sinistra. In questo caso il numero di colonne basiche precedenti la colonna 3 è $k = 2$ e μ_1 e μ_2 sono i primi due elementi di E_{*3} . Quindi:

$$E_{*3} = 2E_{*1} + 3E_{*2} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'altra colonna non-basica di E_A è E_{*5} e le colonne basiche alla sua sinistra sono $k = 3$, specificamente E_{*1} , E_{*2} e E_{*4} . Inoltre i primi $k = 3$ elementi di E_{*5} sono $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 2$ e $\mu_3 = 1/2$. Pertanto

$$E_{*5} = 4E_{*1} + 2E_{*2} + \frac{1}{2}E_{*4} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Lo studente mostri con il calcolo diretto che $A_{*3} = 2A_{*1} + 3A_{*2}$ e $A_{*5} = 4A_{*1} + 2A_{*2} + \frac{1}{2}A_{*4}$.

TEOREMA 1.4. *Sia A una matrice di ordine n . Se una colonna (riga) di A è combinazione lineare di altre colonne (righe) di A , allora $|A| = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Se A ha una colonna combinazione lineare di altre colonne, allora vi sarà una colonna non-basica e $\text{rank}(A) = n - 1$. Essendo A una matrice quadrata, E_A dovrà avere una riga senza elementi pivot, quindi una riga con elementi tutti nulli. Da cui $|E_A| = 0$ e di conseguenza $|A| = 0$. $\square$

Esercizio 1.1

determinare al variare del parametro α , il rango delle seguenti matrici.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & 2 & \alpha \end{bmatrix} ; \\ C &= \begin{bmatrix} \alpha & 2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} 4\alpha & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & 2 \end{bmatrix} ; \\ E &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -\alpha & 1-\alpha & 2 & 2-\alpha \\ 0 & -\alpha & 1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad F = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 2 \\ \alpha & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$