

Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

21 - Sistemi di Equazioni Lineari

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Consiglio

1. Introduzione

Un'equazione del tipo

$$a x + b y = c$$

si dice *lineare* nelle incognite x e y in quanto, se i due parametri a e b sono contemporaneamente diversi da zero, il grafico di $y(x)$, dato da

$$y = m x + h,$$

con $m = -a/b$ e $h = c/b$ è appunto una retta. Si osservi che l'equazione $a x + b y = c$ ammette infinite soluzioni ed esse sono date dalle coppie di punti

$$(x, y) = \left(k, -\frac{a}{b} k + \frac{c}{b} \right),$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Queste soluzioni non sono altro che i punti della retta $y = m x + h$. Si noti che la soluzione di un'equazione lineare *non* deve necessariamente avere la x come variabile indipendente.

Nel caso di tre variabili, x_1 , x_2 e x_3 , un'equazione lineare può essere scritta come:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b.$$

In questo caso, se i parametri a_1 , a_2 e a_3 sono diversi da zero si ha che:

$$x_3 = -\frac{a_1}{a_3} x_1 - \frac{a_2}{a_3} x_2 + \frac{b}{a_3}$$

Se si assume che x_1 , x_2 e x_3 rappresentano, rispettivamente, gli assi x , y e z , allora la precedente equazione descrive un piano nello spazio $\mathbb{R}^3$. Anche in questo caso l'equazione lineare ammette infinite soluzioni, che sono date dai punti di coordinate

$$(x, y, z) = \left(k, t, -\frac{a_1}{a_3} k - \frac{a_2}{a_3} t + \frac{b}{a_3} \right),$$

al variare di k e $t \in \mathbb{R}$, ossia le soluzioni sono date da tutti i punti del piano descritto sopra.

Rimanendo nel campo della geometria, è noto che due rette nel piano o si intersecano, o non si intersecano mai (sono parallele), oppure sono coincidenti. Da un punto di vista algebrico, per descrivere il comportamento di due rette è necessario studiare il sistema di due equazioni

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Come è noto, un sistema di due equazioni in due incognite può avere una soluzione (rette intersecanti), nessuna soluzione (rette parallele), oppure infinite soluzioni (rette coincidenti). Si osservi che in

quest'ultimo caso le due equazioni non sono distinte (si tratta in effetti di una sola retta) e, pertanto, come già visto, le soluzioni sono infinite (come i punti della retta che identificano).

Nel caso di due piani, le soluzioni o sono infinite (due piani si intersecano in una retta o sono coincidenti) o non vi sono soluzioni (piani paralleli). Il sistema lineare sarà composto da 2 equazioni in 3 incognite.

In generale, un sistema lineare di m equazioni in n incognite ha la seguente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove le x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) sono le *incognite* del sistema, gli a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$) sono detti *coefficienti* del sistema e i b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) sono i *termini noti*. Se i termini noti sono tutti nulli allora il sistema è detto *omogeneo*.

Per ogni sistema lineare, l'insieme delle soluzioni può contenere:

- **Unica soluzione:** esiste una sola n-pla di valori che soddisfa simultaneamente tutte le m equazioni.
- **Nessuna soluzione:** nessuna n-pla di valori soddisfa simultaneamente tutte le m equazioni.
- **Infinite soluzioni:** esistono infinite n-plesse che soddisfano simultaneamente tutte le m equazioni. (per esempio in un sistema di due equazioni e tre incognite, la retta dello spazio che identifica, se esiste, l'intersezione dei due piani è un insieme infinito di terne di valori che soddisfa il sistema di equazioni lineari.)

E' possibile dimostrare che *se un sistema lineare ammette più di una soluzione, allora ne ammette infinite*. In altri termini, *non* è possibile che un sistema lineare di equazioni ammetta due (o tre, o quattro, ...) soluzioni. Parafrasando Pirandello, ne ammetterà *una, nessuna o infinite*.

E' interessante osservare che un sistema lineare può essere scritto in forma matriciale. Infatti se si pone:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

il sistema lineare, in forma matriciale, è dato da

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Il nostro obiettivo consisterà nel risolvere i sistemi lineari sfruttando le conoscenze acquisite sulle matrici.

2. Risoluzione di un sistema lineare

La tecnica più comune per la risoluzione di un sistema di equazioni lineare è quella della sostituzione. Tale tecnica consiste nel risolvere sequenzialmente ogni equazione ottenendo un'incognita rispetto al resto delle incognite e poi sostituire l'espressione ottenuta nelle rimanenti equazioni. Si consideri il seguente esempio.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Se si ricava x_1 dalla prima equazione e si sostituisce l'espressione ottenuta nella rimanenti equazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + x_3 \\ -(1 - x_2 + x_3) + 2x_2 - x_3 = 0 \\ (1 - x_2 + x_3) - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + x_3 \\ 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Ricavando x_2 dalla seconda equazione e sostituendo l'espressione ottenuta nella terza equazione si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + x_3 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3} \\ -2\left(\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}\right) + 3x_3 = -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + x_3 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Infine, sostituendo a ritroso si ottiene che $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$ e $x_3 = -\frac{4}{5}$.

Si osservino due aspetti cruciali:

- Una volta ottenuto il sistema nella forma finale, la soluzione si ottiene facilmente sostituendo a ritroso.

- Nella forma finale il sistema ha una struttura matriciale particolare.

Infatti, se partiamo dall'ultima trasformazione eseguita e spostiamo le incognite al primo membro, avremo che:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + x_3 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 = \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

che, in forma matriciale, può essere scritto come:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ -4/5 \end{bmatrix}.$$

Quindi, nella forma finale del metodo di sostituzione, il sistema, in forma matriciale, ha una matrice dei coefficienti triangolare, nel caso di matrici quadrate, e a scala per riga nel caso di matrice dei coefficienti rettangolare. Anche i termini noti risultano modificati dalle operazioni di sostituzione.

Possiamo pertanto concludere che trasformando la matrice dei coefficienti di un sistema di equazioni lineari, nonché i termini noti, in una forma a scala per riga, si ottiene la forma finale del sistema di equazioni, che può poi essere risolto facilmente sostituendo a ritroso.

Sappiamo che questa trasformazione della matrice dei coefficienti del sistema in una matrice in forma a scala per riga si può ottenere tramite il *metodo di riduzione di Gauss*. Cosa succede se si riduce ulteriormente la matrice tramite *riduzione di Gauss-Jordan*?

Si consideri la matrice in forma a scala per riga ottenuta nell'esempio precedente e la matrice (ad una sola colonna) dei termini noti del sistema—entrambe riportate nella precedente espressione in forma matriciale del sistema lineare. Si riarrangino le due matrici in un'unica matrice nel modo seguente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \end{array} \right].$$

Come si può notare la colonna dei termini noti è stata semplicemente “aggiunta” a destra della matrice dei coefficienti. Tale matrice prende il nome di *matrice completa*. Operiamo su questa matrice attraverso il metodo di riduzione di Gauss-Jordan al fine di trasformare *soltanto* la “parte sinistra” della matrice (ovvero la parte relativa ai soli coefficienti del sistema) in una matrice in forma a scala per riga

ridotta (ovvero in una matrice unitaria nel caso di matrice quadrata dei coefficienti). Avremo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + \frac{2}{3} R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 \end{array} \right].$$

Ricostruendo, a questo punto il sistema lineare si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2/5 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -1/5 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = -4/5 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 = 2/5 \\ x_2 = -1/5 \\ x_3 = -4/5 \end{cases}$$

Quindi, il processo di riduzione di Gauss-Jordan applicato alla matrice completa di un sistema lineare determina la soluzione del sistema.

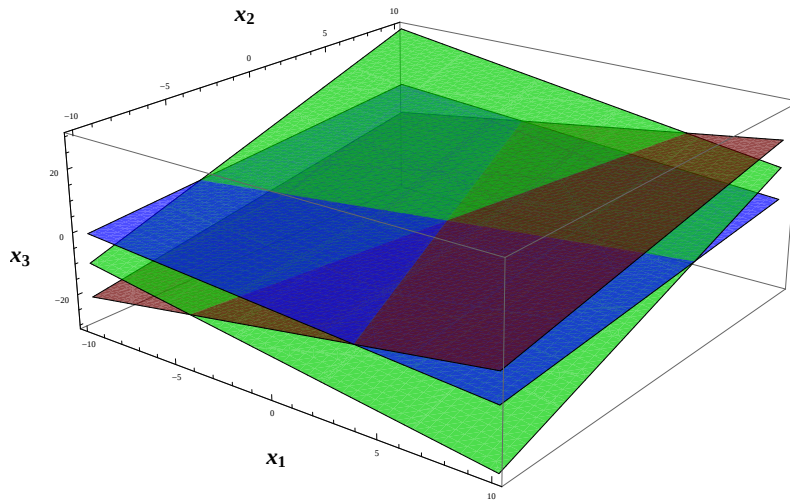


FIGURE 1. Intersezione di tre piani in un punto

Dal punto di vista geometrico, i tre piani (ciascuno definito da un'equazione del sistema), si intersecano, a due a due, lungo una retta, e nel punto di coordinate $(2/5, -1/5, -4/5)$, tutti e tre contemporaneamente.

Questo esempio ci ha mostrato il risultato del processo di Gauss-Jordan applicato ad un sistema che ammette come soluzione un unico punto.

Qual'è il risultato della riduzione di Gauss-Jordan negli altri due casi possibili per un sistema lineare? Come è possibile stabilire se ci sono infinite soluzioni o nessuna soluzione?

Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{cases}$$

Determiniamo la soluzione attraverso il metodo di riduzione di Gauss:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2/4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Si osservi che è stata raggiunta una matrice in forma a scala per riga. Riscrivendo il sistema, si ha:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 0x_1 + x_2 - \frac{3}{2}x_3 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \end{cases}$$

Come si può notare la terza equazione è soddisfatta per qualsiasi terna di valori, ed in particolare, per qualsiasi valore di x_3 . Se poniamo $x_3 = k$ con $k \in \mathbb{R}$ arbitrario, possiamo ricavare dalla seconda equazione x_2 in funzione di $x_3 = k$:

$$x_2 = \frac{3}{2}k + 1.$$

Infine, sostituendo $x_3 = k$ e $x_2 = \frac{3}{2}k + 1$ nella prima equazione, si ha

$$x_1 + \left(\frac{3}{2}k + 1\right) - k = 1,$$

da cui possiamo ricavare x_1 :

$$x_1 = -\frac{1}{2}k.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni è costituito da infinite terne date da $(-\frac{1}{2}k, \frac{3}{2}k + 1, k)$. Da un punto di vista geometrico, tali terne identificano una retta nello spazio $\mathbb{R}^3$, ottenuta dall'intersezione dei tre piani descritti dalle equazioni del sistema.

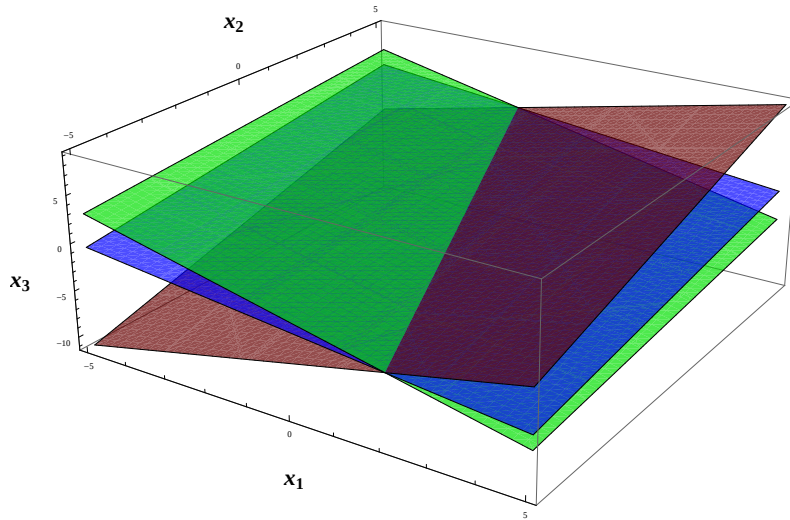


FIGURE 2. Intersezione di tre piani in una retta.

Si consideri, infine, il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{cases}$$

Se si scrive la matrice completa e si procede alla riduzione di Gauss, come lo studente potrà verificare, il risultato sarà il seguente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

La parte della matrice relativa ai coefficienti del sistema è in forma a scala per riga. Quindi possiamo terminare il processo di riduzione. Se ricostruiamo il sistema associato alla forma a scala, si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 0x_1 + x_2 - \frac{3}{2}x_3 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 2 \end{cases}$$

Come si può osservare l'ultima equazione non è mai soddisfatta. Possiamo pertanto concludere che il sistema non ammette mai soluzione. In questo caso si dice che il sistema è *inconsistente*.

Geometricamente i piani identificati dalle equazioni del sistema lineare non hanno alcun punto di intersezione.

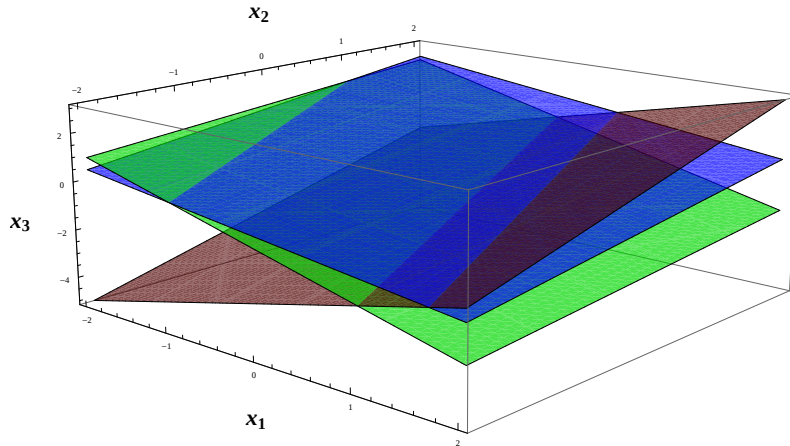


FIGURE 3. Piani che non si intersecano.

I risultati ottenuti sono validi anche per sistemi rettangolari, cioè per sistemi di equazioni lineari in cui il numero di variabili è diverso dal numero di equazioni, come mostra il seguente esempio.

Determinare le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + w + 2z = 1 \\ -4x + 2y + w - 5z = -3 \\ -10x + 5y + w - 12z = -7 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema sarà dunque:

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & -5 & -3 \\ -10 & 5 & 1 & -12 & -7 \end{array} \right]$$

Applichiamo il metodo di riduzione di Gauss:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & -5 & -3 \\ -10 & 5 & 1 & -12 & -7 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 5R_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & -2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \end{aligned}$$

che è in forma a scala per riga. Continuando la riduzione possiamo ottenere che gli elementi pivot siano uguali ad 1:

$$\begin{array}{l} R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [E | \mathbf{c}]$$

Si ricordi che la matrice E non è unica e si potrebbero ottenere elementi diversi da quelli mostrati utilizzando diverse operazioni di riduzione. E' unica invece la struttura di E , ovvero il numero di elementi pivot e la loro posizione. Riguardo il sistema, possiamo dire che esso ammette infinite soluzioni (riga con elementi tutti nulli). L'insieme delle soluzioni si può ottenere ricostruendo il sistema. In particolare:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}w + z = \frac{1}{2} \\ 0x + 0y + w - \frac{1}{3}z = -\frac{1}{3} \\ 0x + 0y + 0w + 0z = 0 \end{cases}$$

Possiamo ricavare w dalla seconda equazione:

$$w = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}.$$

L'incognita z potrà assumere qualsiasi valore, quindi potremo assegnarle dei valori arbitrari, $z = k \in \mathbb{R}$. Risolvendo per x la prima equazione, osserviamo che anche y può assumere valori arbitrari,

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}w - z + \frac{1}{2}.$$

Possiamo dunque porre $y = h \in \mathbb{R}$. Le incognite y e z sono anche dette *variabili libere*. Si osservi che le variabili libere corrispondono alle colonne *non-basiche* della matrice A dei coefficienti. Al contrario, le variabili x e w che sono definite da una precisa espressione, e quindi sono *non libere*, sono associate alle colonne *basiche* della matrice A dei coefficienti. Per questo motivo le espressioni di x e w sono anche dette *soluzioni basiche*. Nello specifico del nostro esempio la soluzione del sistema è:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}h - \frac{7}{6}k + \frac{2}{3} \\ y &= h \\ w &= \frac{1}{3}k - \frac{1}{3} \\ z &= k \end{aligned}$$

dove h e k variano in $\mathbb{R}$.

Tale soluzione è detta *soluzione generale* del sistema. Sostituendo dei valori di h e k si ottiene una soluzione particolare. In alcuni casi è necessario esprimere la soluzione generale in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} h + \begin{bmatrix} -7/6 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se si pone $\mathbf{x} = [x \ y \ w \ z]^T$, $\mathbf{v}_{f_1} = [1/2 \ 1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{v}_{f_2} = [-7/6 \ 0 \ 1/3 \ 1]^T$ e $\mathbf{p} = [2/3 \ 0 \ -1/3 \ 0]^T$, possiamo scrivere la soluzione tramite la seguente combinazione lineare:

$$\mathbf{x} = h \mathbf{v}_{f_1} + k \mathbf{v}_{f_2} + \mathbf{p}$$

In generale, in un sistema lineare ad n incognite, se vi sono r variabili basiche e quindi $n - r$ variabili libere, la soluzione generale potrà essere scritta nella forma:

$$\mathbf{x} = \eta_1 \mathbf{v}_{f_1} + \eta_2 \mathbf{v}_{f_2} + \cdots + \eta_{n-r} \mathbf{v}_{f_{n-r}} + \mathbf{p}.$$

Possiamo sintetizzare nel modo seguente quanto visto sopra:

- (i): Un sistema lineare la cui matrice dei coefficienti è in forma a scala per riga è consistente se le equazioni con gli elementi tutti nulli hanno il termine noto anch'esso nullo.
- (ii): se il sistema è consistente, allora le incognite corrispondenti alle colonne *non basiche* della matrice dei coefficienti assumeranno valori arbitrari e la soluzione del sistema si effettuerà sostituendo a ritroso.
- (iii): Il sistema ammette soluzione unica se tutte le variabili sono basiche.

La condizione (i) permette di stabilire se un sistema lineare è consistente. In alcuni casi, comunque, è necessario ricorrere a condizioni alternative di consistenza. Il seguente teorema fornisce tali condizioni:

TEOREMA 2.1 (Consistenza di Sistemi Lineari). *Sia $[A | \mathbf{b}]$ la matrice completa di un sistema lineare. Se $[A | \mathbf{b}]$ è consistente allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (a): *La $\text{ref}([A | \mathbf{b}])$ non ha righe del tipo $[0, 0, \dots, 0 | \alpha]$, con $\alpha \neq 0$.*
- (b): *$\text{rank}([A | \mathbf{b}]) = \text{rank}(A)$.*

- (c): la colonna dei termini noti, $\mathbf{b}$, è una colonna non basica di $[A | \mathbf{b}]$.
 (d): la colonna dei termini noti è una combinazione lineare delle colonne basiche di A .

PROOF.

- (a) $\Rightarrow$ (b): se $\text{ref}([A | \mathbf{b}])$ non ha righe del tipo $[0, 0, \dots, 0 | \alpha]$, con $\alpha \neq 0$, allora la colonna $\mathbf{b}$ non può contenere elementi pivot (visto che questi devono tutti essere diversi da zero). Pertanto $\text{rank}([A | \mathbf{b}]) = \text{rank}(A)$.
 (b) $\Rightarrow$ (c): se, per assurdo, la colonna dei termini noti fosse basica, allora $\text{rank}([A | \mathbf{b}])$ sarebbe maggiore di $\text{rank}(A)$, quindi $\text{rank}([A | \mathbf{b}]) \neq \text{rank}(A)$, contro l'ipotesi.
 (c) $\Rightarrow$ (d): Se $\mathbf{b}$ è una colonna non basica di $[A | \mathbf{b}]$, allora può essere espressa come combinazione lineare delle colonne basiche di $[A | \mathbf{b}]$, che coincidono con le colonne basiche di A (visto che $\mathbf{b}$ è non basica).
 (d) $\Rightarrow$ (a): se $\mathbf{b}$ è ottenuta come una combinazione lineare delle colonne basiche di A allora tale relazione varrà anche per le colonne di E . Se indichiamo con $[E | \mathbf{b}^I] \equiv \text{ref}([A | \mathbf{b}])$ e con k il numero di colonne basiche di A (e quindi di E), allora possiamo scrivere che $\mathbf{b}^I = \eta_1 E_{*1} + \eta_2 E_{*2} + \dots + \eta_k E_{*k}$. Questo implica che $\forall$ elemento b_i di $\mathbf{b}^I$ sarà $b_i = \eta_1 e_{i1} + \eta_2 e_{i2} + \dots + \eta_k e_{ik}$ il che esclude che ci possa essere un $b_i \neq 0$ tale che $b_i = \eta_1 0 + \eta_2 0 + \dots + \eta_k 0$, da cui segue che $[E | \mathbf{b}^I] = \text{ref}([A | \mathbf{b}])$ non può avere righe del tipo $[0, 0, \dots, 0 | \alpha]$, con $\alpha \neq 0$.

□

Focalizziamo adesso la nostra attenzione su alcuni specifici tipi di sistemi.

3. Sistemi Lineari Omogenei

In questa classe di sistemi lineari i termini noti sono tutti pari a zero:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

Un sistema lineare omogeneo ammette sempre soluzione. In particolare ammette la cosiddetta *soluzione banale*: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Un sistema lineare omogeneo è dunque sempre consistente. Di tali sistemi è importante determinare eventuali soluzioni non banali.

TEOREMA 3.1. *Un sistema lineare omogeneo ammette infinite soluzioni se la sua forma a scala per riga ha un numero di elementi pivot minore del numero di incognite.*

PROOF. Se n è il numero di incognite ed r il numero di elementi pivot, allora vi saranno $n - r$ colonne non basiche e, corrispondentemente, $n - r$ variabili libere. Quindi la soluzione del sistema sarà esprimibile tramite la combinazione lineare:

$$\eta_1 v_{f_1} + \eta_2 v_{f_2} + \eta_{n-r} v_{f_{n-r}},$$

dove $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ assumono valori arbitrari. $\square$

Esempio 3.1

Determinare la soluzione generale in forma matriciale del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Formiamo la matrice completa del sistema $[A|\mathbf{O}]$ e si lascia allo studente la determinazione di $[E|\mathbf{O}] = \text{ref}([A|\mathbf{O}])$:

$$[A|\mathbf{O}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Gauss}} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Come si può notare per i sistemi omogenei la colonna dei termini noti non è modificata dalle operazioni per riga. Quindi può essere omessa. Le colonne non basiche di $[E|\mathbf{O}]$ sono la seconda e la quarta, cui corrispondono le variabili libere x_2 e x_4 . Risolvendo quindi il sistema per le variabili pivot si ha:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = k \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2k - t \\ x_2 = k \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \end{cases}$$

al variare di k e t in $\mathbb{R}$. In forma matriciale questa soluzione può essere scritta nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Le due matrici colonna nel membro destro dell'equazione precedente sono due soluzioni particolari, v_{f_1} e v_{f_2} , del sistema.

TEOREMA 3.2. *Sia $A_{m \times n}$ la matrice dei coefficienti di un sistema lineare omogeneo. Se $n > m$, allora il sistema ammette infinite soluzioni.*

PROOF. E' noto che $\text{rank}(A) \leq \min(m, n)$. Visto che, per ipotesi, $n > m$ allora $\text{rank}(A) = r \leq m < n$. Pertanto vi saranno $n - r$ colonne non basiche di A e, corrispondentemente, $n - r$ variabili libere. La soluzione generale del sistema sarà dunque data dalla combinazione lineare di $n - r$ variabili arbitrarie. $\square$

COROLLARIO 3.3. *Un sistema di equazioni lineare omogeneo in n incognite con matrice dei coefficienti A ammette una ed una sola soluzione, quella banale, se e solo se $\text{rank}(A) = n$, ovvero se non ci sono variabili libere.*

4. Sistemi Lineari Non Omogenei

Abbiamo visto nella prima parte come è possibile determinare la soluzione di sistemi lineari qualsiasi. Quindi, condizioni generali che valgono sia per i sistemi omogenei che non omogenei. In questa sezione ci soffermeremo su alcuni aspetti che riguardano soltanto i sistemi non omogenei.

In generale un sistema non omogeneo si presenta nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con b_i ($i = 1, \dots, m$) non tutti nulli. Se il sistema è consistente e risulta $\text{rank}(A) = r < n$, allora vi saranno $n - r$ variabili libere e la soluzione generale del sistema è data da:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \eta_1 \mathbf{v}_{f_1} + \eta_2 \mathbf{v}_{f_2} + \cdots + \eta_{n-r} \mathbf{v}_{f_{n-r}}.$$

Se si pone $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_{n-r} = 0$ allora si vede che $x = p$ è ancora soluzione del sistema lineare. Tale soluzione è detta *soluzione particolare* del sistema non omogeneo. Inoltre, la soluzione generale del sistema non omogeneo è composta dalla soluzione particolare $x = p$ e dalla soluzione generale del sistema omogeneo associato.

TEOREMA 4.1. *Sia $A_{m \times n}$ la matrice dei coefficienti di un sistema lineare consistente. Se il sistema ammette una ed una sola soluzione, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

- (a): $\text{rank}(A) = n$;
- (b): non ci sono variabili libere;
- (c): il sistema lineare omogeneo associato ammette soltanto la soluzione banale.

Esempio 4.1

Determinare la soluzione generale del seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ -2x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Lo studente verifichi che applicando il metodo di riduzione di Gauss alla matrice completa del sistema $[A|\mathbf{b}]$ si ottiene la seguente matrice in forma a scala per riga:

$$\text{ref}([A|\mathbf{b}]) = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & \mathbf{1} & 5/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 58/21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Il sistema ammette una ed una sola soluzione e $\text{rank}(A) = 3$. Si noti che Se un sistema non omogeneo in n incognite ($n = 3$ nell'esempio) ammette una e una sola soluzione allora $\text{rank}(A) = n$. Tuttavia, al contrario dei sistemi lineari omogenei, *non* vale l'implicazione inversa. In altre parole se un sistema non omogeneo in n incognite ha matrice dei coefficienti A tale che $\text{rank}(A) = n$ esso potrebbe anche essere inconsistente, come mostrato nel seguente esempio.

Esempio 4.2

Si studi la consistenza del seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ -2x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

In questo caso dalla $\text{ref}([A|\mathbf{b}])$ si evince che il sistema è inconsistente nonostante $\text{rank}(A) = 3$. Infatti:

$$\text{ref}([A|\mathbf{b}]) = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & \mathbf{1} & 5/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 58/21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

La presenza in $\text{ref}([A|\mathbf{b}])$ di una riga del tipo $(0 \ 0 \ 0 \mid 1)$, che è del tipo $(0 \ 0 \ 0 \mid \alpha)$ con $\alpha \neq 0$ implica che il sistema è inconsistente.

5. Sistemi Lineari Quadrati

I sistemi lineari con matrice dei coefficienti quadrata possono essere risolti in maniera alternativa. Come è noto, un sistema lineare può essere descritto dalla seguente espressione matriciale:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove A è la matrice dei coefficiente, $\mathbf{x}$ la matrice colonna delle variabili e $\mathbf{b}$ la matrice colonna dei termini noti. Se A è invertibile possiamo pre-moltiplicare ambo i membri dell'equazione per l'inversa A^{-1} ottenendo

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

da cui

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Se A è invertibile il sistema ammette una ed una sola soluzione, e questa si ottiene pre-moltiplicando la colonna dei termini noti per A^{-1} .

Questo approccio ha, tuttavia, un interesse più teorico che pratico. Infatti, come abbiamo visto, l'inversione di una matrice implica una riduzione di Gauss-Jordan sulla matrice $[A|I_n]$, mentre, con la più semplice riduzione di Gauss si può risolvere un sistema lineare con meno calcoli. Inoltre, se la matrice A non è invertibile ciò *non* implica che il sistema *non* ammetta soluzione. Infatti se $|A| = 0$ (che implica che

A non è invertibile) potrebbero esistere infinite soluzioni. Ciò accade sicuramente per sistemi quadrati omogenei.

TEOREMA 5.1. *Sia A_n la matrice dei coefficienti di un sistema di equazioni lineari omogeneo. Se $|A| = 0$ allora il sistema ammette infinite soluzioni.*

PROOF. Se $|A| = 0$ allora $\text{rank}(A) = r < n$. Allora esistono $n-r > 0$ colonne non basiche di A, ovvero, per un teorema già discusso, $n-r$ variabili libere e il sistema ammette infinite soluzioni. $\square$

Esempio 5.1

Si studi l'insieme delle soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale t .

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_3 = -1 \\ tx_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

Formiamo la matrice completa del sistema e procediamo con la riduzione di Gauss della matrice:

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ t & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - tR_1 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1+t & -2t-1 & 4-t \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{R_2}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1+t & -2t-1 & 4-t \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - (1+t)R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(t+3) & \frac{1}{2}(9-t) \end{array} \right]$$

Se $t = -3$ allora l'elemento a_{33} della matrice precedente diventa nullo: $\frac{1}{2}(t+3) = 0$, mentre l'elemento a_{34} risulta $\frac{1}{2}(9-t) = 6 \neq 0$. Questo implica che, se $t = -3$ la terza riga della matrice diventa del tipo $(0 \ 0 \ 0 \mid \alpha)$ con $\alpha = 6 \neq 0$. Dunque se $t = -3$ il sistema è inconsistente. Procediamo quindi ad analizzare il sistema per $t \neq -3$. Il passaggio successivo consiste nel ricondurre ad 1 il valore del pivot nella terza colonna. Ciò si ottiene moltiplicando la riga 3 per $2/(t+3)$. In questo modo si ottiene che:

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 \frac{2}{t+3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9-t}{t+3} \end{array} \right]$$

Questa struttura della matrice ridotta garantisce che, per $t \neq -3$ il sistema ammette un'unica soluzione, di cui si lascia allo studente la ricerca.

Esempio 5.2

Si studi l'insieme delle soluzioni del seguente sistema al variare dei parametri reali a e b .

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ ax_1 + 2x_2 - bx_3 = -1 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice completa del sistema $[A|\mathbf{b}]$ e procediamo con la riduzione di Gauss.

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} R_2 \rightarrow R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - \frac{a}{2}R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ a & 2 & -b & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{a+4}{2} & -b & -\frac{2+a}{2} \end{array} \right] \\ & \begin{array}{c} R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1 \\ R_2 \rightarrow -2R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & \frac{a+4}{2} & -b & -\frac{2+a}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{a+4}{2}R_2} \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -b + 2(a+4) & 2a+9 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Consideriamo il terzo elemento in “grassetto” nella matrice: $-b + 2(a+4)$. Se questo elemento è pari a zero e contemporaneamente lo è anche l'elemento a_{34} della matrice, ovvero $2a+9$, allora il sistema avrà infinite soluzioni, in quanto il sistema sarà coerente e la terza colonna della matrice sarà non basica. Cerchiamo i valori di a e b per cui ciò avviene:

$$\begin{cases} -b + 2(a+4) = 0 \\ 2a+9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2(a+4) \\ a = -\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

Si lascia allo studente la ricerca delle infinite soluzioni del sistema nel caso in cui $a = -9/2$ e $b = -1$. Nel caso in cui $a \neq -9/2$ e $b \neq 2(a+4)$ il sistema è inconsistente poiché la terza riga sarebbe del tipo $(0 \ 0 \ 0 \mid \alpha)$ con $\alpha = 2(a+4) \neq 0$. Infine se $b \neq 2(a+4)$ il sistema ammette una ed una sola soluzione.

Ora vedremo un metodo alternativo di risolvere sistemi lineari quadrati non omogenei nel caso in cui la matrice dei coefficienti sia a rango pieno. Per far questo dobbiamo premettere alcune definizioni.

6. Definizione di Matrice Aggiunta

Sia A una matrice di ordine n . Si definisce *matrice aggiunta* di A , e si indica con $\text{adj}(A)$, la matrice trasposta della matrice dei cofattori di A .

Esempio 6.1

Ricavare la matrice aggiunta della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Il cofattore M_{ij} è dato, come sappiamo, dal prodotto di $(-1)^{i+j}$ per il determinante della sottomatrice di A ottenuta eliminando la riga i e la colonna j . Si ha dunque:

$$M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5 ; \quad M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -18 ;$$

$$M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -16 ; \quad M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -11 ;$$

$$M_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 ; \quad M_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7 ;$$

$$M_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 ; \quad M_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 ;$$

$$M_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -13. \quad \text{Quindi } M = \begin{bmatrix} 5 & -18 & -16 \\ -11 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & -13 \end{bmatrix}$$

Una volta costruita la matrice dei cofattori, M , possiamo immediatamente ottenere la matrice aggiunta di A , $\text{adj}(A)$ come la matrice trasposta di M :

$$\text{adj}(A) = M^T = \begin{bmatrix} 5 & -11 & 7 \\ -18 & 2 & 3 \\ -16 & 7 & -13 \end{bmatrix}.$$

TEOREMA 6.1. *Sia A una matrice invertibile, allora:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Il teorema precedente indica un metodo per calcolare l'inversa di una matrice (invertibile) A . Essa può essere calcolata dividendo tutti gli elementi della matrice aggiunta di A per il determinante di A . Il

risultato di questo teorema è un lemma importante per la dimostrazione del teorema di Kramer per la risoluzione di sistemi lineari quadrati.

TEOREMA 6.2. *Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare di n equazioni in n incognite. Sia $|A| \neq 0$. La soluzione unica del sistema può essere scritta nella seguente forma:*

$$x_i = \frac{|H_i|}{|A|}, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

dove $|H_i|$ è il determinante della matrice di ordine n che si ottiene sostituendo alla i -esima colonna di A la colonna $\mathbf{b}$ dei termini noti.

PROOF. Dal teorema precedente si ha che $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$. Inoltre, poiché $|A| \neq 0$, allora il sistema ammette soluzione unica nella forma $\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b}$. Quindi:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \mathbf{b}.$$

D'altro canto la matrice $\text{adj}(A)$ è, per definizione, la matrice trasposta dei cofattori della matrice A . Se indichiamo con M_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) i cofattori di A , possiamo esplicitare la matrice $\text{adj}(A)$ come:

$$\text{adj}(A) = M^T = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & \cdots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & \cdots & M_{n2} \\ \vdots & & & \\ M_{1n} & M_{2n} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix},$$

e quindi scrivere la soluzione per la i -esima incognita x_i come:

$$x_i = \frac{M_{1i} b_1 + M_{2i} b_2 + \cdots + M_{ni} b_n}{|A|}.$$

Si osservi che il numeratore non è altro che lo sviluppo di Laplace (per colonna) del determinante della matrice H_i ottenuta sostituendo alla colonna i -esima di A la colonna $\mathbf{b}$ dei termini noti. Quindi:

$$x_i = \frac{|H_i|}{|A|}, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

□

Esempio 6.2

Determinare l'equazione del piano passante per i punti $P_1 = (0, 1, 1)$, $P_2 = (1, 0, 1)$ e $P_3 = (1, 1, 0)$. La generica equazione di un piano è:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Il piano che cerchiamo deve passare per i tre punti P_1 , P_2 e P_3 sopra indicati. Questo vuol dire che l'equazione precedente deve essere soddisfatta in ciascuno di questi punti e nel punto generico $P = (x, y, z)$. Abbiamo quindi quattro equazioni che devono essere simultaneamente soddisfatte:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 & \text{(Passaggio per il generico punto } P) \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 & \text{(Passaggio per } P_1) \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 & \text{(Passaggio per } P_2) \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 & \text{(Passaggio per } P_3) \end{cases}$$

Sostituendo le coordinate dei punti si ottiene il seguente sistema quadrato omogeneo nelle incognite a , b , c e d :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ b + c + d = 0 \\ a + c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione diversa da quella banale ($a = b = c = d = 0$) solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando questo determinante secondo Laplace rispetto alla prima riga si ottiene l'equazione del piano desiderata:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot z - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Si lascia allo studente il compito di calcolare questi determinanti e ottenere l'equazione finale del piano.

Esercizio 6.1

Determinare, quando consistenti, la soluzione in forma matriciale dei seguenti sistemi lineari:

$$(a) \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \\ 3x + 6y + z = 4 \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \\ 4x + 2y + 6z = 0 \end{cases};$$

$$(c) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ x + y - z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}; \quad (d) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ x + y - z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases};$$

$$(e) \begin{cases} 2w + x + 3y + 5z = 1 \\ 4w + 4y + 8z = 0 \\ w + x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}; \quad (f) \begin{cases} 2w + x + 3y + 5z = 7 \\ 4w + 4y + 8z = 8 \\ w + x + 2y + 3z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases};$$

Esercizio 6.2

Risolvere il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

e trovare, qualora ciò sia possibile, almeno una soluzione (x, y, z) verificante l'ulteriore condizione $yz \leq 0$.

Esercizio 6.3

Per quali valori del parametro reale a il seguente sistema di equazioni lineari ammette infinite soluzioni?

$$\begin{cases} ax + 2y + z = a^2 - 1 \\ x + (a + 1)y + z = 0 \\ 3x + 2y + (4 - a)z = 0 \end{cases}$$