

Università degli Studi di Palermo
Scuola Politecnica
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

01 - Elementi di Teoria degli Insiemi

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, A. Pecorella, V. Lacagnina, D.

Provenzano, A. Consiglio

1. Introduzione

Il concetto di insieme è un concetto primitivo, ossia che non può essere definito mediante altri concetti più semplici.

Talvolta capita di dire o ascoltare frasi quali: “l’insieme delle vocali”, “l’insieme dei numeri pari”, “l’insieme delle matricole della Facoltà di Economia dell’Università degli Studi di Palermo”. In altri termini, nell’uso comune, trova posto la parola *insieme* con il significato di collezione di oggetti di qualsiasi natura ed aventi una o più caratteristiche in comune. Come concetto matematico l’insieme continuerà ad avere lo stesso significato.

Di solito, per indicare gli insiemi, si utilizzano le lettere maiuscole dell’alfabeto: $A, B, C, \dots$

Un insieme è formato da *elementi*; esiste un particolare insieme privo di elementi detto *insieme vuoto* e indicato con il simbolo $\emptyset$. Anche i concetti di *elemento* e *insieme vuoto* sono concetti primitivi. Gli elementi di un insieme si indicano con le lettere minuscole: $a, b, c, \dots$. Se a è un elemento dell’insieme A , si scrive:

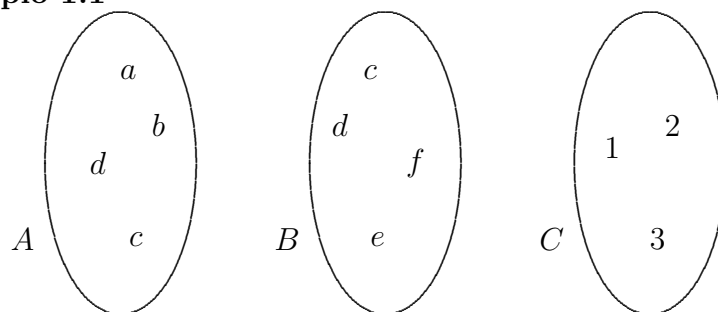
$$a \in A$$

e si dice che a *appartiene all’insieme* A . Se a non è un elemento di A , si scrive

$$a \notin A$$

e si dice che a *non appartiene all’insieme* A . Gli elementi possono essere rappresentati graficamente tramite i cosiddetti *diagrammi di Eulero-Venn*.

Esempio 1.1



Un altro modo per rappresentare gli insiemi è la cosiddetta *rappresentazione tabulare* in cui vengono elencati tutti gli elementi dell’insieme:

$$A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

È bene evidenziare che **gli elementi di un insieme sono distinti** fra loro e che **l’ordine con cui si elencano è ininfluente**.

Non è corretto, per esempio, scrivere $A = \{1, 7, 5, 7\}$ perché il 7 compare due volte.

In relazione all'ordine con cui si descrivono gli elementi di un insieme si ha:

$$A = \{1, 5, 7\} = \{1, 7, 5\} = \{5, 1, 7\} = \{5, 7, 1\} = \{7, 1, 5\} = \{7, 5, 1\}.$$

Un ulteriore modo alternativo per descrivere un insieme A è, quando possibile, quello di scegliere un insieme “noto” che contiene A ed individuare gli elementi specificando una o più condizioni caratterizzanti.

Esempio 1.2

L'insieme $C = \{0, 1, \dots, 9\}$ potrebbe rappresentarsi scrivendo:

$$C = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 9\}$$

Esempio 1.3

L'insieme $D = \{1, 3, 5, \dots\}$ dei numeri naturali dispari può rappresentarsi scrivendo:

$$D = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$$

2. Notazione: quantificatore esistenziale e universale

Il simbolo “ $\exists$ ” si legge “esiste” e viene usato spesso per ragioni di sintesi e precisione. Per esempio, la seguente espressione:

$$\exists x \in A \text{ t.c. } \dots$$

si legge: “Esiste almeno un elemento x in A tale che¹ ...”

Questa seconda scrittura, che differisce dalla precedente soltanto per l'introduzione del punto esclamativo:

$$\exists! x \in A \text{ t.c. } \dots$$

si legge: “Esiste ed è unico l'elemento x in A tale che ...”

Invece l'espressione:

$$\forall x \in A : \dots$$

si legge: “Per ogni elemento x di A risulta ...”

I simboli “ $\exists$ ” e “ $\forall$ ” si chiamano rispettivamente *quantificatore esistenziale* e *quantificatore universale*.

¹in sostituzione di “t.c.” si utilizza spesso il simbolo “:”, o anche “/”

3. Relazioni di inclusione tra insiemi

Diciamo che due insiemi A e B sono *uguali* se hanno gli stessi elementi (l'ordine non ha importanza) e si scrive

$$A = B$$

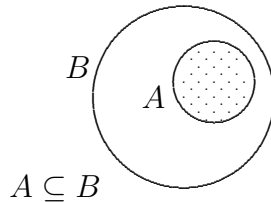
In caso contrario gli insiemi A e B si dicono *diversi* e si scrive

$$A \neq B$$

Si dice che l'insieme A è un *sottoinsieme* dell'insieme B se ogni elemento di A è anche elemento di B . In tal caso si dice che A è *incluso* in B (oppure che A è *contenuto* in B) e si scrive

$$A \subseteq B$$

Graficamente



In pratica, tutti gli insiemi sono considerati sottoinsiemi di un insieme $U \neq \emptyset$, noto anche come *insieme universo*. In probabilità questo insieme è di solito indicato con Ω e rappresenta l'evento certo.

Nel caso in cui si considerino soltanto sottoinsiemi A diversi da B (come nella figura precedente), si scrive anche

$$A \subset B$$

e si legge “ A è contenuto propriamente in B ”. In sostanza, affinché si possa dire che “ A è contenuto propriamente in B ” deve succedere che (i) tutti gli elementi di A appartengano anche a B e (ii) che esista almeno un elemento di B che non appartiene ad A .

Da quanto detto può dedursi che per dimostrare che $A = B$ è possibile applicare il **principio di doppia inclusione**:

$$A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$

La scrittura

$$A \not\subseteq B$$

si legge “ A non è contenuto in B ”, ossia esiste almeno un elemento dell'insieme A che non sta in B .

Esempio 3.1

Sia $A = \{3, 5, 7\}$ e $B = \{0, 2, 3, 5\}$ allora $A \not\subseteq B$ perchè $7 \in A$ e $7 \notin B$.

Per convenzione si assume che l'insieme vuoto sia contenuto in ogni insieme:

$$\emptyset \subseteq A$$

e si dice che A è un sottoinsieme *proprio* di B se (i) $A \neq \emptyset$ e (ii) $A \neq B$. Dalla definizione di inclusione risulta evidente che

$$A \subseteq A$$

ossia, qualunque insieme A è sottoinsieme di se stesso.

Di particolare importanza per la matematica sono i cosiddetti *insiemi numerici*. Indichiamo con

$\mathbb{N}$: l'insieme dei numeri naturali $\{1, 2, 3, \dots\}$;

$\mathbb{Z}$: l'insieme dei numeri interi $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;

$\mathbb{Q}$: l'insieme dei numeri razionali $\left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$;

$\mathbb{R}$: l'insieme dei numeri reali;

$\mathbb{C}$: l'insieme dei numeri complessi.

Un'importante proprietà dell'inclusione è la *proprietà transitiva* per cui se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, allora $A \subseteq C$. Inoltre, se

$$A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A, \quad \text{allora} \quad A = B$$

Un insieme molto importante, soprattutto in calcolo delle probabilità, è l'*insieme delle parti* di A , che si indica con $\mathcal{P}(A)$, ed è definito come l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di A .

Esempio 3.2

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$, l'insieme delle parti è

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Nota bene. È importante non confondere il simbolo 1 con il simbolo $\{1\}$: il primo rappresenta l'*elemento* di A , il secondo rappresenta l'*insieme formato dal solo elemento* 1 . Nello specifico: $1 \in A$, $\{1\} \subset A$ e $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$.

Si definisce *cardinalità di un insieme finito* il numero dei suoi elementi e si indica con $|A|$ o $\text{card}(A)$. È possibile dimostrare che il numero di elementi dell'insieme delle parti è

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Esercizio 3.1

- (1) Scrivere in forma tabellare i seguenti insiemi
 $A = \{n \in \mathbb{N} : n < 10\}$
 $B = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2, n < 12\}$
 $C = \{n \in \mathbb{N} : n < 0\}$
 $D = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x \leq 7\}$
- (2) Determinare l'insieme delle parti dei seguenti insiemi
 $A = \{a, b, c\}$
 $B = \{0, \{1, a\}\}$
 $C = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è un numero primo } < 5\}$

4. Operazioni con gli insiemi

Siano A e B due insiemi. Si chiama **intersezione** fra i due insiemi A e B , e si indica con $A \cap B$, il seguente insieme:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$. Si osservi che se $A \subseteq B$, allora $A \cap B = A$.

Si definisce **unione** fra i due insiemi A e B , e si indica con $A \cup B$, il seguente insieme

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

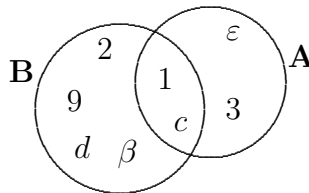
Si osservi che se $A \subseteq B$, allora $A \cup B = B$.

Esempio 4.1

Sia $A = \{c, 3, 1, \varepsilon\}$ e $B = \{2, \beta, 1, d, c, 9\}$. Risulta:

$$A \cap B = \{1, c\} ; A \cup B = \{3, 1, \varepsilon, 2, \beta, d, c, 9\}.$$

Visivamente, con i diagrammi di Eulero-Venn, si ha



L'unione e l'intersezione di due o più insiemi godono di varie proprietà. Le più importanti sono

- *Proprietà associativa* dell'unione e dell'intersezione

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

- *Proprietà commutativa* dell'unione e dell'intersezione

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$

- *Proprietà di idempotenza*

$$A \cap A = A \quad A \cup A = A$$

- *Proprietà distributiva dell'unione rispetto l'intersezione*

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

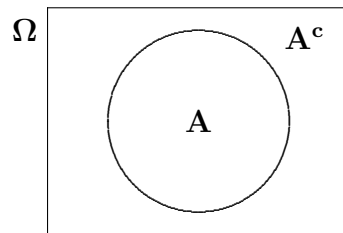
- *Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto l'unione*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Sia Ω l'insieme universo, si definisce *insieme complementare*, e si indica con A^c , l'insieme:

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$$

Attraverso i diagrammi di Eulero-Venn l'insieme complementare si rappresenta nel modo seguente:



Il rettangolo rappresenta l'insieme universo Ω .

Valgono alcune interessanti proprietà:

- $(A^c)^c = A$
- $A \cup A^c = \Omega$ (*principio del terzo escluso*)
- $A \cap A^c = \emptyset$ (*principio di non contraddizione*)

Dal punto di vista logico, se l'insieme A rappresenta un attributo (l'insieme dei numeri pari), il principio di non contraddizione permette di escludere che il medesimo attributo e la sua negazione appartengano allo stesso oggetto (non esiste un numero che sia pari e dispari allo stesso tempo. Il numero 0 è pari in quanto $2 \cdot 0 = 0$).

Un'altra operazione tra insiemi molto usata è la differenza. Dati due insiemi A e B si definisce *insieme differenza* tra A e B , e si indica con $A \setminus B$, l'insieme

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Alternativamente possiamo scrivere che

$$A \setminus B = (A \cap B)_A^c,$$

dove il simbolo $(.)_A^c$ indica il complementare dell'insieme in parentesi nell'insieme A .

5. Il prodotto cartesiano

Una *coppia ordinata* è un insieme di due elementi in cui si tiene conto dell'ordine con il quale si prendono gli elementi dell'insieme. Una coppia ordinata si denota con (a, b) . Quindi

$$\{a, b\} = \{b, a\}, \text{ mentre } (a, b) \neq (b, a)$$

Dati due insiemi A e B , si definisce *prodotto cartesiano* fra A e B (in simboli $A \times B$) l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Se $A = B$, si è soliti scrivere A^2 invece di $A \times A$.
Si osservi che, in generale, $A \times B \neq B \times A$.

Esempio 5.1

Siano due insiemi $A = \{f, g\}$ e $B = \{\smile, \frown\}$. Si ha che

$$A \times B = \{(f, \smile), (f, \frown), (g, \smile), (g, \frown)\}$$

$$B \times A = \{(\smile, f), (\smile, g), (\frown, f), (\frown, g)\}$$

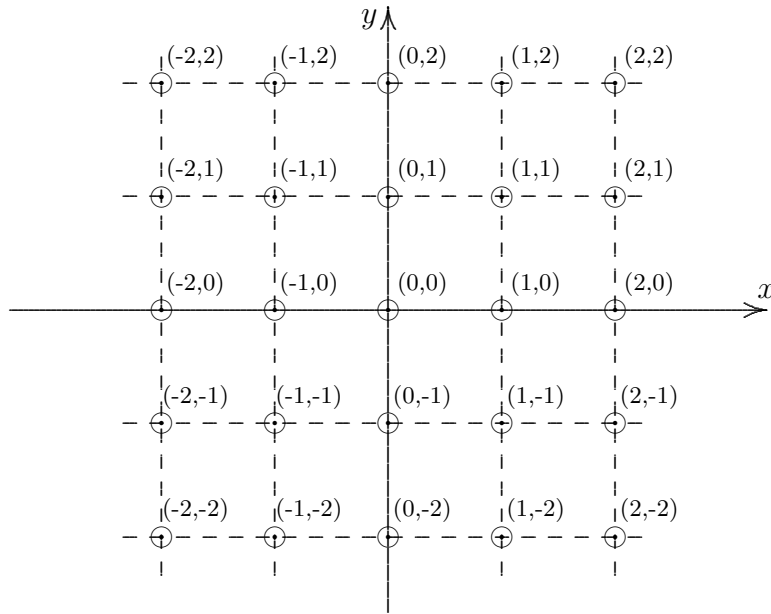
Esempio 5.2

Dato l'insieme $A = \{2, 3, 4\}$, si ha che

$$A^2 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

Da un punto di vista grafico, se riportiamo l'insieme A su due assi perpendicolari che si intersecano in $(0, 0)$, A^2 è dato dai punti nel piano di coordinate (x, y) . Se l'insieme è $\mathbb{R}$ - l'insieme dei numeri reali - e rappresentiamo $\mathbb{R}$ tramite una retta orientata, allora $\mathbb{R}^2$ è l'insieme delle coppie ordinate (x, y) dove $x \in X$ (*asse delle ascisse*) e $y \in Y$ (*asse delle ordinate*). Geometricamente, il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^2$ rappresenta lo spazio.

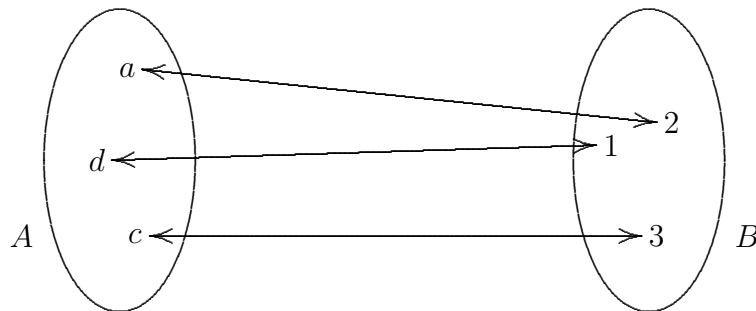
Il prodotto cartesiano $\mathbb{Z}^2$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, e si può rappresentare tramite una griglia di punti



6. Cardinalità

Si definisce *relazione binaria* fra due insiemi A e B un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Dati due insiemi A e B , una *corrispondenza biunivoca* è una relazione binaria tra A e B , tale che ad ogni elemento di A corrisponde *uno ed un solo* elemento di B e viceversa.

Graficamente



Possiamo ora estendere il concetto di cardinalità al caso di insiemi non finiti.

Definizione Due insiemi A e B si dicono *equipotenti* (o anche che hanno la *stessa cardinalità*) se esiste una corrispondenza biunivoca fra A e B .

Un insieme A si dice *finito* se non può essere messo in corrispondenza biunivoca con alcun suo sottoinsieme proprio. Un insieme A è *infinito* se esiste una corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Un insieme A si dice *numerabile* se ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali.

7. Esercizi di riepilogo

1. Rappresentare l'insieme dei numeri interi positivi pari.

2. Rappresentare l'insieme dei numeri interi positivi dispari.

3. Determinare gli elementi dell'insieme:

$$A = \{(7 - x) \in \mathbb{N} : x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

4. Determinare gli elementi dell'insieme:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$$

5. Determinare gli elementi dell'insieme:

$$A = \{(x - 1) \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq 1\}$$

6. Dopo aver determinato gli elementi degli insiemi:

$$A = \{(-x) \in \mathbb{N} : x^2 + 7x + 12 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq 2x + 1 \leq 11\}$$

Trovare gli elementi degli insiemi:

$$A \cap B \quad A \cup B$$

Stabilire infine se vale una delle seguenti relazioni:

$$A \subseteq B \quad \text{oppure} \quad B \subseteq A$$

7. Si considerino gli insiemi :

$$A = \{2, -1, 3, 7, 5, 17\} \quad B = \{-1, 2, 3, 5, 7, 17\}$$

Stabilire se $A = B$.

8. Si considerino gli insiemi :

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad B = \{1, 3, 5, 6, 10, 17\}$$

Stabilire se vale una delle seguenti relazioni: $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.

9. Si considerino gli insiemi :

$$A = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad B = \{-1, 3, 5, 6, 7\}$$

Stabilire se vale una delle seguenti relazioni: $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$. Determinare inoltre la cardinalità dei due insiemi.

10. Si considerino gli insiemi :

$$A = \{2, 3, 4, 5, 7, 11\} \quad B = \{1, 3, 5, 6, 10, 17\}$$

Determinare $A \cap B$ e $A \cup B$.

11. Si consideri l'insieme:

$$S = \{2, 3, 7\}$$

Si trovi $P(S)$ cioè l'insieme delle parti di S .

12. Si considerino gli insiemi :

$$A = \{-3, 0, 5, 7, 17\} \quad B = \{-3, -2, 1, 3, 5, 17\}$$

Determinare $A \setminus B$ e $B \setminus A$.

13. Si considerino gli insiemi :

$$A = \{1, 3, 5\} \quad B = \{2, 4\}$$

Determinare $A \times B$ e $B \times A$.

14. Stabilire se la seguente uguaglianza insiemistica è vera:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

15. Stabilire se la seguente uguaglianza insiemistica è vera:

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$