

Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Economia
Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali e Statistiche

Appunti del corso di Matematica

05 - Funzioni di una Variabile

Anno Accademico 2015/2016

M. Tumminello, V. Lacagnina, A. Pecorella, D.

Provenzano e A. Consiglio

1. Introduzione

Abbiamo visto che una relazione è una legge che associa a qualche elemento di un insieme A uno o più elementi di un insieme B . In altri termini, una relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Una **funzione** è una particolare relazione e si definisce come segue.

1.1. Definizione di funzione. Dati due insiemi A e B , una *funzione* f dall'insieme A all'insieme B è una relazione fra A e B che **ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B** . In simboli:

$$f : A \rightarrow B$$

Si osservi che gli insiemi A e B possono coincidere. Data una funzione $f : A \rightarrow B$, se all'elemento $a \in A$ corrisponde l'elemento $b \in B$, si dice che b è *il corrispondente di a* (oppure che b è *l'immagine di a tramite f*) e si scrive:

$$f(a) = b.$$

Si dice anche che l'elemento a nella precedente formula è la **variabile indipendente**, mentre l'elemento b è la **variabile dipendente**.

Data una funzione $f : A \rightarrow B$, l'insieme A si dice **dominio** della funzione e l'insieme B si dice **codominio della funzione**. Il dominio si indica anche con $D(f)$.

1.2. Definizione di funzione suriettiva. Una funzione $f : A \rightarrow B$ è suriettiva se

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b.$$

In altri termini, una funzione è suriettiva se ogni elemento b del codominio (ossia $\in B$) è il corrispondente di almeno un elemento a del dominio (ossia di almeno un elemento $a \in A$). Una rappresentazione grafica di una funzione suriettiva è riportata in Fig.1.

Funzione suriettiva

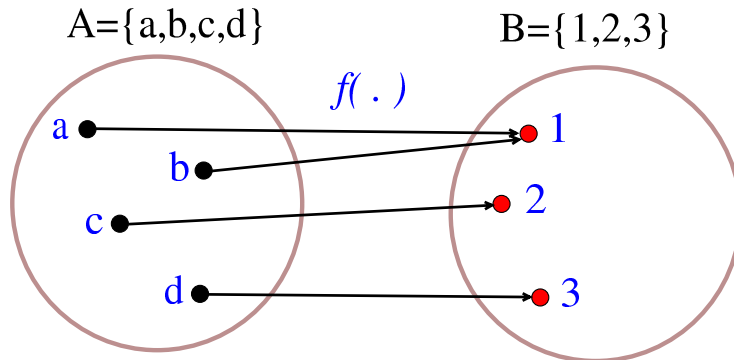


FIGURE 1. Esempio di funzione suriettiva.

1.3. Definizione di funzione iniettiva. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice iniettiva se

$$\forall a, b \in A : a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

In altri termini, una funzione è iniettiva se ad elementi distinti del dominio ($\forall a, b \in A : a \neq b$) corrispondono elementi distinti del codominio (ossia $f(a), f(b) \in B : f(a) \neq f(b)$). Una rappresentazione grafica di una funzione iniettiva è riportata in Fig.2.

Funzione iniettiva

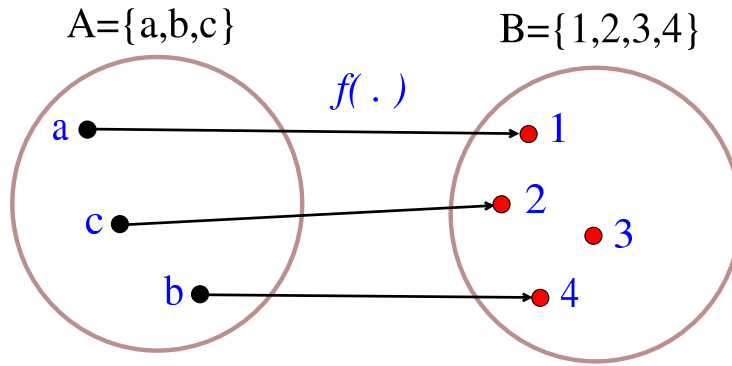


FIGURE 2. Esempio di funzione iniettiva.

Come si può osservare in Fig.2, nel caso di funzioni iniettive è possibile che alcuni elementi di B non siano il corrispondente di alcun elemento di A .

1.4. Definizione di funzione biettiva. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice biettiva (o biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva, ossia

$$\forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b.$$

In altri termini, una funzione $f : A \rightarrow B$ è biettiva se per ogni elemento b del codominio B (ossia $\forall b \in B$) esiste uno ed un solo elemento a del dominio A (ossia $\exists! a \in A$) tale che $f(a) = b$. Si veda la figura 3 per un esempio grafico di funzione biettiva.

Esempi 1.1

- (1) La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $f(n) = 2n, \forall n \in \mathbb{N}$ è iniettiva. Infatti, $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) = 2n_1 \neq f(n_2) = 2n_2$. Si noti che questa funzione NON è suriettiva poiché se k è un numero dispari, non esiste alcun $n \in \mathbb{N}$ tale che $k = 2n$.

Funzione biettiva o biunivoca

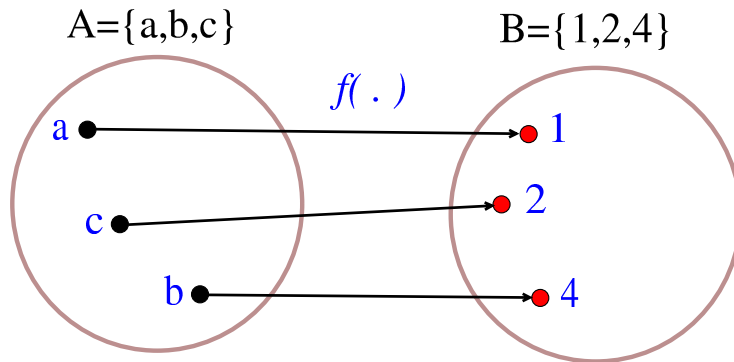


FIGURE 3. Esempio di funzione biettiva (o biunivoca).

(2) La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow B = \{3.18\} \subset \mathbb{R}$ tale che $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\alpha) = 3.18$ è suriettiva. Infatti, preso comunque $y \in B$ allora y è il corrispondente di tutti in numeri reali.

(3) La funzione $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definita come:

$$f(x) = 3x + 10$$

è una funzione biunivoca. La dimostrazione è lasciata per esercizio.

1.5. Definizione di funzione invertibile. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice invertibile se esiste una funzione $g : Y \rightarrow X$ tale che:

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in X,$$

$$f(g(y)) = y, \quad \forall y \in Y,$$

Se esiste, una tale funzione $g(\cdot)$ è unica e si indica con $f^{-1}(\cdot)$. Non tutte le funzioni sono invertibili. Vale tuttavia il seguente teorema.

TEOREMA 1.1. *Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è invertibile se e soltanto se f è una funzione biunivoca.*

Esempio 1.2

Funzione invertibile con inversa calcolabile analiticamente.

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = 2 + 3x$$

è invertibile. Infatti, tutte le funzioni lineari sono biunivoche e quindi invertibili, in quanto $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow y_1 = f(x_1) = 2 + 3x_1 \neq 2 + 3x_2 = f(x_2) = y_2$. Inoltre $\forall y \in \mathbb{R} \exists! x \in \mathbb{R}$ tale che $2 + 3x = y$,

in particolare $x = \frac{1}{3}(y - 2)$. Si osservi che se avessimo definito la nostra $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ciò non sarebbe stato possibile perché, ad esempio, per $y = 3$ $\nexists x \in \mathbb{N}$ tale che $f(x) = 2 + 3x = 3$.

Uno degli approcci per determinare la funzione inversa consiste nel risolvere, come nell'esempio appena visto, l'equazione $f(x) = y$ rispetto ad x . Tuttavia, ciò non è sempre possibile analiticamente, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.3

Funzione invertibile con inversa non esprimibile in forma analitica.

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = x + \sin(x),$$

riprodotta in figura 4, è invertibile, poiché biettiva. Tuttavia la sua inversa non può essere scritta in forma analitica in quanto l'equazione $y = x + \sin(x)$ non può essere risolta algebricamente rispetto ad x .

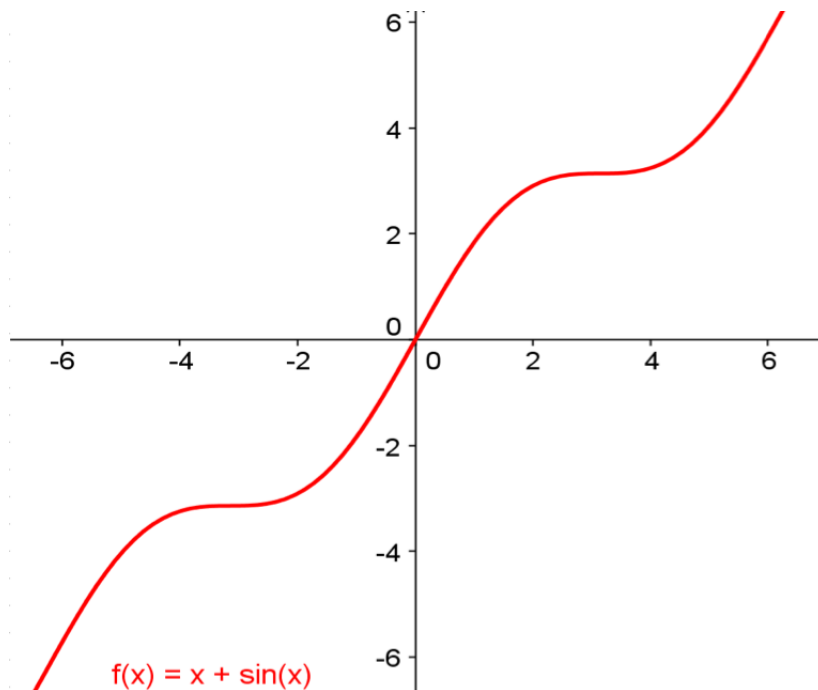


FIGURE 4. Grafico della funzione $x + \sin(x)$.

Esempio 1.4**Funzione non invertibile.**

La funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$g(x) = x^2$$

non è invertibile nell'intero asse reale. Infatti, come si evince dalla figura 5, $g(x)$ non è iniettiva, in quanto, ad esempio, i valori $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$, quindi $x_1 \neq x_2$, hanno la stessa immagine: $g(x_1) = g(x_2) = 4$. Se invece considerassimo la funzione $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, oppure la funzione $g : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$, otterremmo (in entrambi i casi) una funzione biunivoca e quindi invertibile. Nel caso $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ la funzione inversa di $g(\cdot)$ è $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$, mentre nel caso della funzione $g : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$ la funzione inversa di $g(\cdot)$ è $g^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.

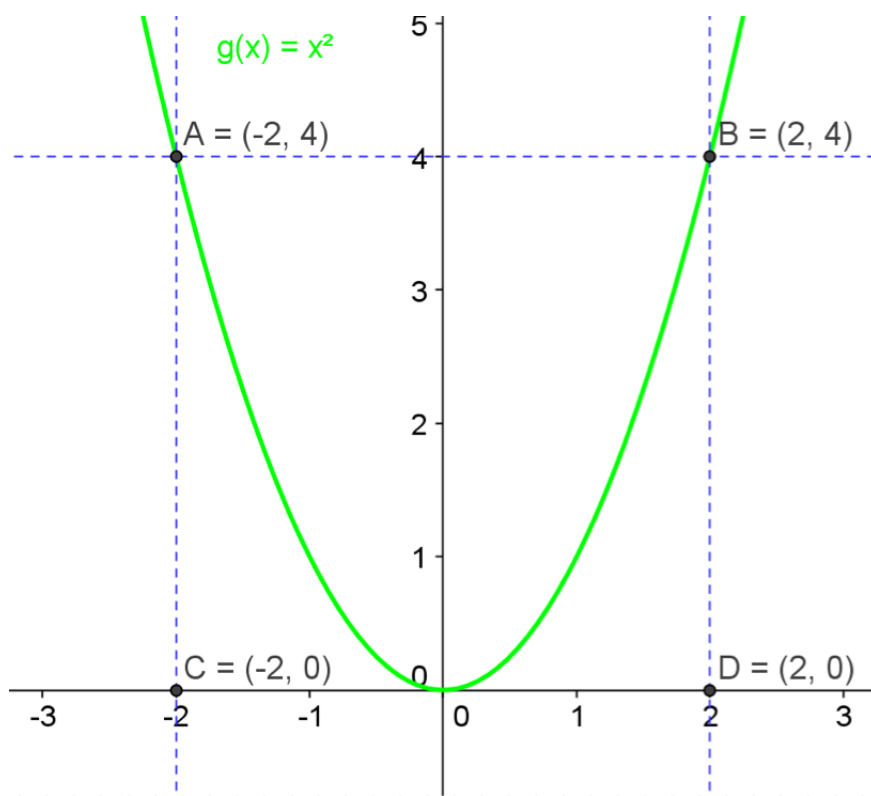


FIGURE 5. Grafico della funzione x^2 .

L'esempio appena mostrato ci consente di mettere in luce un aspetto molto importante. La *geometria analitica* si occupa dello studio dei cosiddetti **luoghi geometrici** (retta, parabola, cerchio, ecc.) tramite il sistema di coordinate cartesiane. I luoghi geometrici sono definiti per mezzo di equazioni, disequazioni o sistemi algebrici. Per esempio

la retta è definita (in forma implicita) dall'equazione

$$a x + b y + c = 0 \quad (1)$$

Tutte le rette con $b \neq 0$ possono essere rappresentate in forma esplicita da:

$$y = m x + q \quad (2)$$

E' facile constatare che l'equazione (2) può essere ottenuta risolvendo la (1) nella variabile y e che la (2) è una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biunivoca. Tuttavia, non è sempre possibile rappresentare la soluzione di un'equazione in termini di una funzione. Per esempio, l'equazione della parabola avente l'asse parallelo a quello delle ordinate è

$$(x - h)^2 = 4p(y - k), \quad (3)$$

dove h, k, p sono parametri. Dalla (3) si ottiene la familiare forma esplicita

$$y = a x^2 + b x + c, \quad (4)$$

dove a, b, c sono parametri che si ottengono da h, k, p . La (4) è una funzione invertibile solo su specifici intervalli di $\mathbb{R}$. Infatti se consideriamo tutto il dominio $\mathbb{R}$ essa non risulta iniettiva, ossia a diversi valori di x può corrispondere lo stesso valore di y . La (4), seppur non biunivoca, è comunque una funzione. In generale ciò non è sempre vero. Si consideri, per esempio, l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h), \quad (5)$$

da cui si ottiene la forma esplicita

$$x = a y^2 + b y + c, \quad (6)$$

con i parametri a, b e c ottenuti da h, k e p . Semplifichiamo la discussione ponendo $a = 1$ e $b = c = 0$. Con queste posizioni la (6) si riduce a:

$$x = y^2. \quad (7)$$

Se lasciamo che y possa variare su tutto $\mathbb{R}$, la (7) NON è una funzione. Infatti agli elementi distinti del dominio $+y$ e $-y$ corrisponde lo stesso valore di x e ciò è in contraddizione con la definizione di funzione, la quale richiede che ad ogni valore di x corrisponda uno ed un solo valore di y . Non sfuggirà allo studente che la (7) può essere espressa come:

$$y = \pm\sqrt{x}, \quad (8)$$

$\forall x \geq 0$. Se si prova a tracciare il grafico della funzione $\sqrt{x}$ con un qualsiasi programma, il grafico tracciato sarà quello del ramo $+\sqrt{x}$ della (8) (o, che è lo stesso, della Eq.7). E' possibile dunque rappresentare [7] come una funzione a patto di specificarne opportunamente il codominio. In particolare possiamo definire due funzioni:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ e } g(x) = -\sqrt{x}.$$

Entrambe le funzioni hanno lo stesso dominio $[0, \infty)$. I codomini invece sono diversi, rispettivamente, $[0, \infty)$ e $(-\infty, 0]$. Il grafico di queste due funzioni è riportato in figura 6.

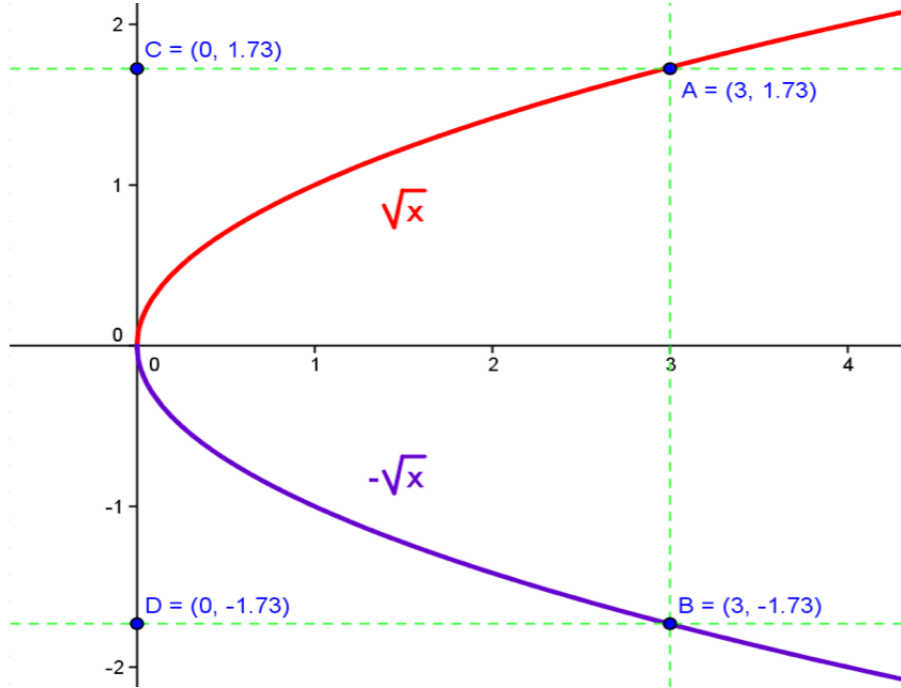


FIGURE 6. Grafico delle funzioni $+\sqrt{x}$ e $-\sqrt{x}$.

Un ragionamento analogo a quello ora svolto per la parabola con asse parallelo a quello delle ascisse si applica all'equazione della circonferenza di centro (a, b) e raggio r :

$$(y - a)^2 + (x - b)^2 = r^2.$$

Se, per semplicità, si considera la circonferenza centrata in $(0, 0)$ di raggio unitario, si ha che

$$x^2 + y^2 = 1,$$

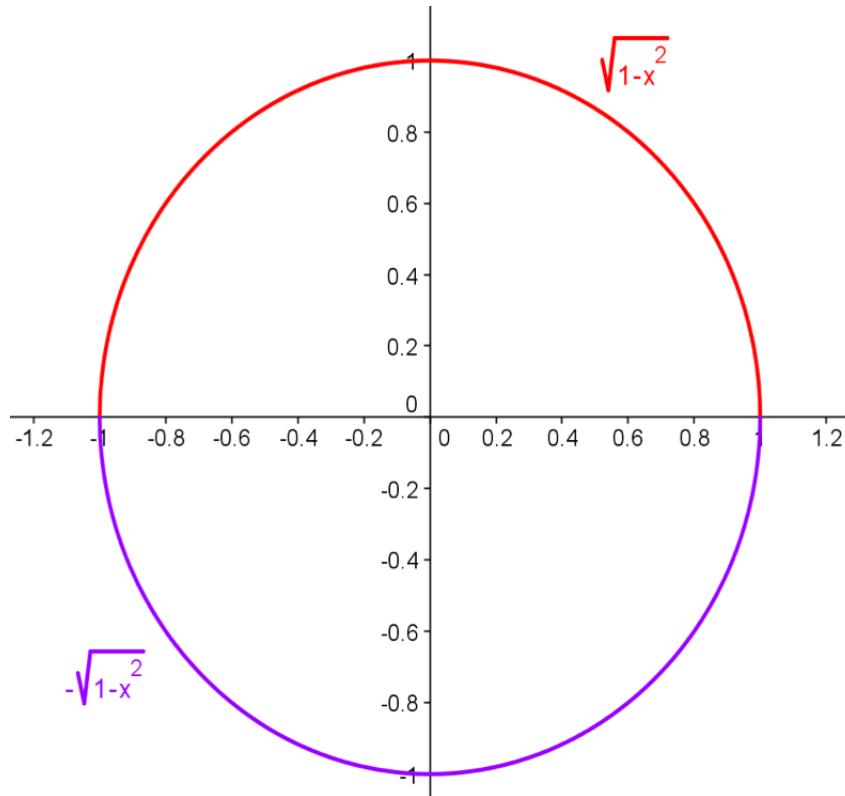
da cui

$$y^2 = 1 - x^2. \quad (9)$$

Anche in questo caso, per $y \in [-1, 1]$ la (9) non è una funzione. Tuttavia possiamo definire due funzioni a descrivere i due diversi rami:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ e } g(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

entrambe aventi come dominio $x \in [-1, 1]$, ma diverso codominio, $y \in [0, 1]$ e $y \in [-1, 0]$, rispettivamente, come mostrato in Fig.7.

FIGURE 7. Grafico delle funzioni $+\sqrt{1-x^2}$ e $-\sqrt{1-x^2}$.

Prevalentemente, il nostro interesse si focalizzerà sulle funzioni reali di variabile reale e utilizzeremo la seguente notazione:

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Definizione di funzione crescente. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *crescente* in A se, $\forall x, y \in A : x < y$, risulta:

$$f(x) < f(y).$$

Definizione di funzione non decrescente. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *non decrescente* in A se, $\forall x, y \in A : x < y$, risulta:

$$f(x) \leq f(y).$$

Definizione di funzione decrescente. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *decrescente* in A se, $\forall x, y \in A : x < y$, risulta:

$$f(x) > f(y).$$

Definizione di funzione non crescente. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *non crescente* in A se, $\forall x, y \in A : x < y$, risulta:

$$f(x) \geq f(y).$$

Definizione di funzione limitata. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *superiormente limitata* (*inferiormente limitata*) se la sua immagine è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato (inferiormente limitato). Una funzione si dice *limitata* se è limitata sia superiormente che inferiormente.

Definizione di funzione periodica. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *periodica* se esiste $T > 0$ tale che, $\forall x \in A$, si ha $x + T \in A$ e risulta $f(x) = f(x + T)$. Il più piccolo valore T per cui vale la precedente relazione è detto **periodo** della funzione.

Tutte le funzioni trigonometriche sono classici esempi di funzioni periodiche. Le funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$, il cui grafico è riportato in figura 8, hanno un periodo pari a 2π . La funzione $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ha un periodo pari a π , come mostrato in figura 9.

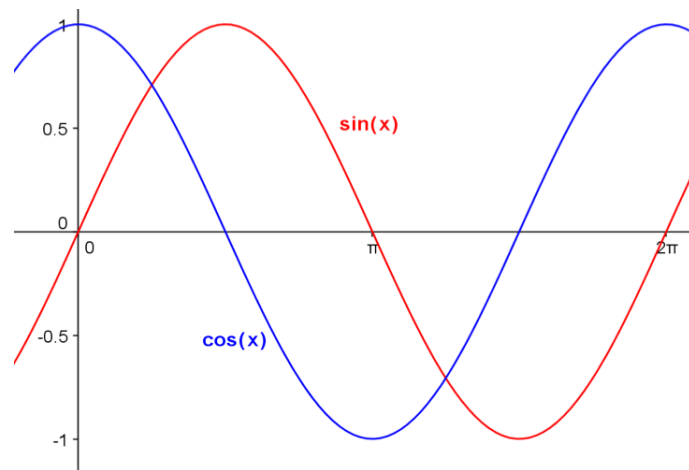
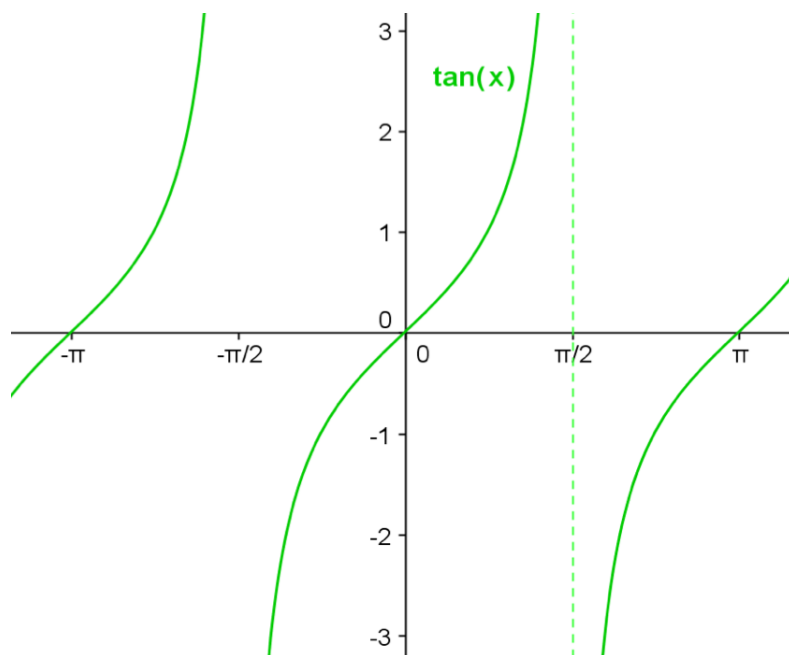


FIGURE 8. Grafico delle funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

FIGURE 9. Grafico della funzione $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Esercizi 1.1

Lo studente tracci il grafico delle seguenti funzioni elementari, determini il dominio, e, se diverso, il dominio in cui la funzione è invertibile. Tracciare inoltre il grafico della funzione inversa, nel caso in cui essa esista.

Suggerimento: un metodo pratico per verificare se una funzione è iniettiva consiste nel tracciare una retta parallela all'asse delle ascisse ($y = k$) e accertarsi che tale retta intersechi la funzione $f(x)$ in un solo punto. Nel caso non sia così si restringa il dominio nella zona dove ciò avviene. Per verificare se una funzione è suriettiva, tracciare sempre la retta $y = k$ e accertarsi che essa incontri la funzione in almeno un punto. Nel caso non sia così si restringa il *codominio* nella zona dove ciò avviene.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = k, \text{ con } k \text{ parametro reale, ossia } k \in \mathbb{R}.$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = ax + b, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ \sqrt{x+1} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Esercizi 1.2

Lo studente tracci il grafico delle seguenti funzioni elementari, determini il dominio, e, se diverso, il dominio in cui la funzione è invertibile. Tracciare inoltre il grafico della funzione inversa, nel caso in cui essa esista.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = |x|.$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : f(x) = \sqrt[n]{x}, \text{ con } n \in \mathbb{N}.$$

$$f : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : f(x) = \arcsin(x).$$

$$f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] : f(x) = \arccos(x).$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : f(x) = \arctan(x).$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} : f(x) = e^x$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} : f(x) = a^x, \text{ con } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, (\text{si provi per } a < 1 \text{ e } a > 1).$$

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \ln(x).$$

Esercizio 1.3

Lo studente tracci il grafico di funzioni polinomiali del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

(per esempio $p(x) = x^5 + 3x^2 - 4x$, oppure $p(x) = -2x^3 + 4x$), ne determini il dominio, e, se diverso, il dominio in cui la funzione è invertibile. Tracciare inoltre il grafico della funzione inversa, nel caso in cui essa esista.

Esercizio 1.4

Lo studente tracci il grafico di funzioni razionali del tipo

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ dove } p(x) \text{ e } q(x) \text{ sono funzioni polinomiali (cfr. ex. prec.),}$$

(per esempio $f(x) = \frac{-3x^2+4}{4x^4+x^2-1}$), ne determini il dominio, e, se diverso, il dominio in cui la funzione è invertibile. Tracciare inoltre il grafico della funzione inversa, nel caso in cui essa esista.