MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) PROVA IN ITINERE 2016/17

MATR._____ COGNOME_____ NOME_____

TEMA

1) Individuare il campo di esistenza, i limiti, la derivata prima e relativo dominio, della funzione:

$$f(x) = x \log x^2$$

C.E. $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, f(-x) = -x\log(-x)^2 = -x\log x^2 = -f(x)$ funzione dispari che studio in $x \in (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x^2)}{\frac{1}{x}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -2x = 0^- \text{ No asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\log x^2 = +\infty; \text{ No asintoto orizzontale;}$$

$$f'(x) = \log x^2 + x\,\frac{2x}{x^2} = \log x^2 + 2 \;\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{3x} - 1}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{3x} - 1}{\sin x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot 2^{3x}\log 2}{\cos x} = \frac{3\cdot 1\cdot \log 2}{1} = 3\log 2 = \log 8$$

Riportare solo i passaggi essenziali

MATR._____ COGNOME_____ NOME_____

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{1+1} = 1$$

4) Calcolare

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-2x}\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-2x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-2x}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{(1-2x)^2}\right) = \frac{d}{dx}(2\cdot(1-2x)^{-2}) =$$

$$= 2\cdot(-2)(1-2x)^{-3}(-2) = \frac{8}{(1-2x)^3}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

MATR._____ COGNOME_____ NOME_____

5) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x & \text{se } x \geq 1 \\ -x + k & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$f(1) = 2 + 4 = 6 = \lim_{x \to 1^-} -x + k = -1 + k \Rightarrow k = 7$ è la condizione cercata.

Riportare solo i passaggi essenziali