TEMA 1

- Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{2x} - 4e^{x} + 16\right)$$

- Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n-1}}$$

- Discutere il seguente sistema lineare, dipendente dal parametro α, variabile da 0 a 2π.

$$\begin{cases} x\sin^2\alpha + y = 1 + 3\sin\alpha \\ x\sin^2\alpha - y = 1 - 3\sin\alpha \\ x(1+\sin^2\alpha) \ = \qquad 2 \end{cases}$$

  si ponga a tal fine $a = \sin\alpha$.

- Scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado della funzione

$$f(x) = \log x$$

  nel punto $x = 1$.

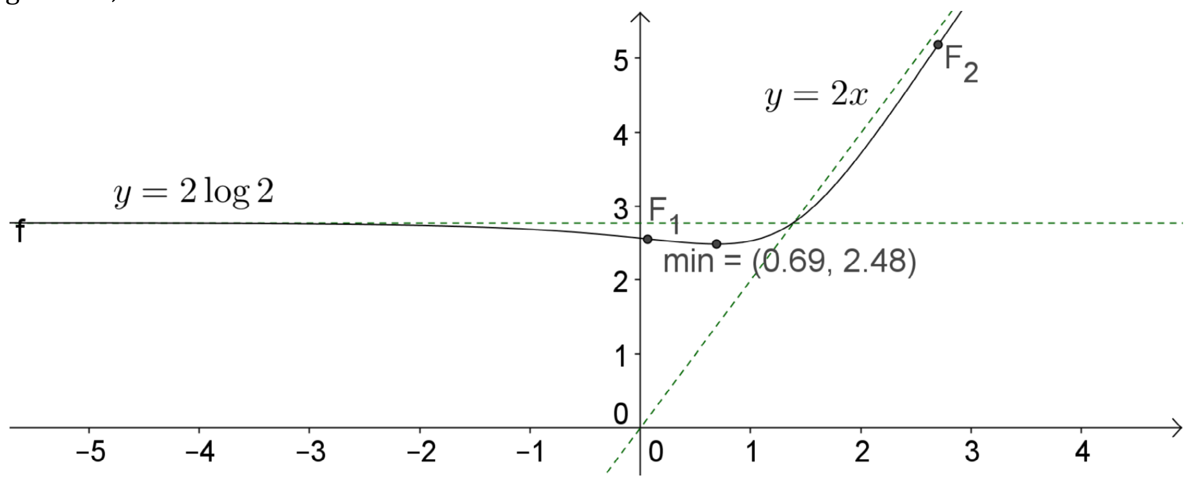
E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Soluzioni Tema 1

1) $f(x) = \log(e^{2x} - 4e^x + 16)$; C.E. $t = e^x$ da cui $t^2 - 4t + 16 > 0; \frac{\Delta}{4} = 4 - 16 < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \log(e^{2x} - 4e^x + 16) = +\infty;\ m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^{2x} - 4e^x + 16)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \log\left(1 - \frac{4}{e^x} + \frac{16}{e^{2x}}\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{\log\left(1 - \frac{4}{e^x} + \frac{16}{e^{2x}}\right)}{x} = 2$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log(e^{2x} - 4e^x + 16) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \log(e^{2x} - 4e^x + 16) - \log(e^{2x})$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{e^{2x} - 4e^x + 16}{e^{2x}}\right) = 0\ ; \Rightarrow y = 2x \text{ asintoto obliquo dx}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \log(e^{2x} - 4e^x + 16) = \log(16) \cong 2{,}77;\ \Rightarrow y = 2\log 2 \text{ asintito orizzontale sx}$$
$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 4e^x + 16} \text{ con C.E. } x \in \mathbb{R}$$

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow 2e^{2x} - 4e^x \geq 0 \Rightarrow 2e^x(e^x - 2) \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 2 \Rightarrow x \geq \log 2$; da cui $f(x)$ è strettamente crescente per $x > \log 2$, strettamente decrescente per $x < \log 2$ e assume minimo relativo in $x = \log 2 \cong$ $\cong 0{,}69$ con $f(\log 2) = \log\left(e^{2\log 2} - 4e^{\log 2} + 16\right) = \log(e^{\log 4} - 4 \cdot 2 + 16) = \log(4 - 8 + 16) =$ $= \log 12 \cong 2{,}48$



Dalla presenza dei due asintoti e dalla posizione del minimo si evince la presenza dei due flessi indicati in figura.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n-1}}$ analizziamo il termine generale della serie:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} 3\frac{n^n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{3}\right)^n = +\infty$ poiché il termine generale della serie è divergente, la serie diverge.

3) $\begin{cases} x\sin^2\alpha + y = 1 + 3\sin\alpha \\ x\sin^2\alpha - y = 1 - 3\sin\alpha \\ x(1 + \sin^2\alpha) = 2 \end{cases}$ ponendo $a = \sin\alpha$ diventa $\begin{cases} xa^2 + y = 1 + 3a \\ xa^2 - y = 1 - 3a \\ x(1 + a^2) = 2 \end{cases}$

Per essere il sistema compatibile il determinante della matrice completa deve essere nullo:

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

$$\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1+3a \\ a^2 & -1 & 1-3a \\ 1+a^2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2a^2 + (1-3a)(1+a^2) + (1+3a)(1+a^2) - 2a^2 =$$

$$= -4a^2 + 1 + a^2 - 3a - 3a^3 + 1 + a^2 + 3a + 3a^3 = -2a^2 + 2 = 0$$

da cui si ottiene

$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \mp 1$

$a = 1)$ Basta prendere come minore le prime due righe, prime due colonne, il sistema diventa:

$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}$ che ammette soluzione $(1, 3)$

$a = -1)$ Basta prendere come minore le prime due righe, prime due colonne, il sistema diventa:

$\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 4 \end{cases}$ che ammette soluzione $(-3, 1)$

Poiché $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ e $a = \sin\alpha$ si ha che il sistema è compatibile e ammette una ed una sola soluzione per

$a = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\pi$ mentre $a = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

4) $f(x) = \log x;\ f'(x) = \frac{1}{x}; f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ da cui $f(1) = 0; f'(1) = 1; f''(1) = -1$ si ottiene

$P_2(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{2x - 2 - x^2 - 2x + 1}{2} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{2}$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.