TEMA A

1) **[6]** Studiare la funzione

$$f(x) = e^x\sqrt{x}$$

2) **[3]** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[4]{x}\,|\log^5 x|$$

3) **[3]** Scegliere la risposta corretta e giustificarla. Dato l'insieme:

$$A = \left\{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$$

e sapendo che esso rappresenta il coinsieme di una successione strettamente crescente, l'estremo superiore di A:

a) non esiste; b) è < 2 c) è 1 d) è >2

4) **[3]** Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x + \dfrac{x}{|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

valutare la continuità e la derivabilità della funzione nel suo dominio.

5) **[3]** Le soluzioni dell'equazione $e^{-|x|} = \sqrt{\pi}$ sono:

a) due opposte; b) due negative; c) nessuna soluzione; d) una soluzione;

6) **[1]** Decomporre il polinomio $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ e studiare dove esso è negativo.

7) **[4]** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt[3]{n^3+1} - n$$

8) **[3]** Dopo avere verificato le ipotesi si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = x|x|$$

nell'intervallo chiuso $[-1, 1]$.

9) **[2]** Trovare le soluzioni del seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - ky = 3 \\ x + y + z = 2 \\ kx + y - z = 1 \end{cases}$$

10) **[2]** Indicare quale di questi valori può rappresentare la cardinalità di un insieme delle parti (di un insieme con un numero finito di elementi), motivando la risposta:

a) 0; b) 14; c) 32; d) 34;

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30.**

Soluzioni Tema A

1) $f(x) = e^x\sqrt{x}$; C.E. $x \geq 0$, inoltre $f(x) \geq 0\ \forall x \geq 0$ con $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\sqrt{x} = +\infty;\ \ m = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty\ \Rightarrow \text{non esiste asintoto obliquo}$$

$$f'(x) = e^x\sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = e^x\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}\quad \text{con C.E. } x > 0$$

Evidentemente, poiché $e^x > 0$, $2\sqrt{x} > 0$ per ogni $x > 0$ si avrà che $f'(x) \geq 0$ per $2x + 1 \geq 0$ ossia

$$x \geq -\frac{1}{2} \bigcap x > 0 \Rightarrow x > 0$$

da cui la $f'(x) > 0, \forall x > 0$, e quindi la $f(x)$ è strettamente crescente nel suo dominio con tangente sinistra in $x = 0$ data da $\lim_{x\to0^+} e^x\frac{x+1}{2\sqrt{x}} = +\infty$

$$f''(x) = \underbrace{e^x\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}}_{>0} + e^x\frac{4\sqrt{x} - (2x+1)2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x} = e^x\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} + e^x\frac{4x-2x-1}{4x\sqrt{x}} = e^x\frac{4x^2+4x-1}{4x\sqrt{x}}, \forall x$$

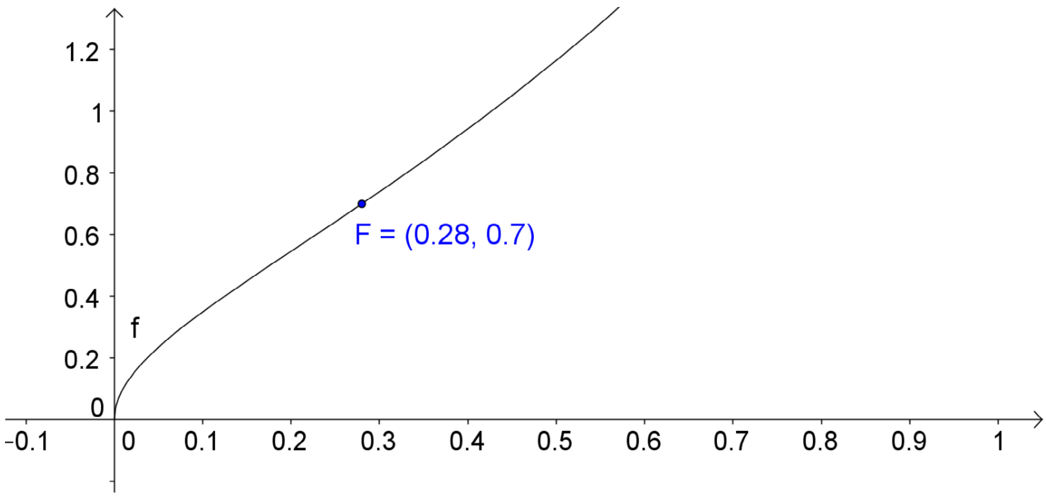
Data la positività di $e^x, 4x\sqrt{x}$, nel dominio $x > 0$ si ha che $f''(x) \geq 0$ se $4x^2 + 4x - 1 \geq 0$ e poiché

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 4 = 8 \Rightarrow x = \frac{-2 \mp 2\sqrt{2}}{4} = \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2} \cong -1{,}78 \\ \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2} \cong +0{,}28 \end{cases} \text{da cui}$$

$$x \leq -1{,}78 \vee x \geq +0{,}28 \bigcap x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ per } x > 0{,}28, f''(x) < 0 \text{ per } 0 < x < 0{,}28$$

in $x = 0{,}28$ si ha flesso $F(0{,}28, 0{,}7)$ con tangente obliqua pari a $f'(0{,}28) = 1{,}95$

prima di questo flesso la funzione rivolge la concavità verso il basso mentre dopo il flesso rivolge la concavità verso l'alto.



2) $\lim_{x\to0^+} \sqrt[4]{x}\,|\log^5 x| = \lim_{x\to0^+} \frac{|\log^5 x|}{\frac{1}{x}^{\frac{1}{4}}}$ ponendo $\frac{1}{t} = x$, ossia $t = \frac{1}{x}$, da cui per $x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$ si ha che

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' <u>obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30</u>.**

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\log^5 x|}{\frac{1^{\frac{1}{4}}}{x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{|\log^5\frac{1}{t}|}{t^{\frac{1}{4}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left|\left(\log\frac{1}{t}\right)^5\right|}{t^{\frac{1}{4}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{|(\log 1-\log t)^5|}{t^{\frac{1}{4}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{|-\log^5 \mathrm{t}|}{t^{\frac{1}{4}}}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{|\log^5 \mathrm{t}|}{t^{\frac{1}{4}}}=0 \quad \text{poiché il numeratore è infinito di ordine inferiore al denominatore}$$

3) $A=\left\{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n : n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}$ è il coinsieme di una successione strettamente crescente.

(evidentemente è la successione di Nepero). Il suo estremo superiore è proprio e > 2 e quindi la risposta esatta è la (d) .

4) Evidentemente l'unico punto a poter dare problemi per la continuità e la derivabilità è $x=0$ infatti per tale valore del dominio $f(0)=0$ ma se studiamo limite destro e sinistro:

$$\lim_{x\to 0^-}-x+\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}-x+\frac{x}{-x}=\lim_{x\to 0^-}-x-1=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}-x+\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}-x+\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^-}-x+1=+1$$

Evidentemente i due limiti sono diversi e differenti dal valore assunto dalla funzione che risulta pertanto non continua né derivabile in $x=0$.

5) $e^{-|x|}=\sqrt{\pi}\Rightarrow\frac{1}{e^{|x|}}=\sqrt{\pi}\Rightarrow e^{|x|}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Rightarrow|x|=\log\frac{1}{\sqrt{\pi}}=-\log\sqrt{\pi}$ che è impossibile

La risposta corretta è la (c).

6) Il polinomio x^3+5x^2+3x-9 ha possibili radici razionali $\pm1,\pm3,\pm9$, si vede subito che $x=1$ è uno zero. Utilizziamo Ruffini

	1	5	3	-9
1		1	6	9
	1	6	9	0

ossia $x^3+5x^2+3x-9=(x-1)(x^2+6x+9)=(x-1)(x+3)^2<0$ se $x-1<0$ ossia

$$x<1\ \wedge x\neq-3$$

7) $\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt[3]{n^3+1}-n$ Il termine generale della serie è una successione infinitesima, infatti:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n^3+1}-n=\lim_{n\to+c}\frac{n^3+1-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=\lim_{n\to+c}\frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=0$$

Come si vede dal calcolo del limite a denominatore è presente un termine divergente con natura polinomiale di tipo n^2. Per tale motivo proviamo a confrontare la serie in questione con la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)n^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}n^2=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+1\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+1}=\frac{1}{3}$$

8) $f(x)=x|x|$ è continua in $[-1,1]$ in quanto il termine in valore assoluto si annulla nello zero della funzione e quindi $f(0)=0$. Vediamo la derivabilità:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 \text{ se } 0\le \mathrm{x}\le 1\\ -x^2 \text{ se } -1\le \mathrm{x}<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x \text{ se } 0\le \mathrm{x}\le 1\\ -2x \text{ se } -1\le \mathrm{x}<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=2|x|$$

Ossia la derivata prima si annulla nello zero del valore assoluto con la conseguenza che la funzione è derivabile in $\mathrm{x}=0$. Per Lagrange deve succedere:

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=2|c|\Rightarrow\frac{1-(-1)}{2}=2|c|\Rightarrow\frac{2}{2}=2|c|\Rightarrow|c|=\frac{1}{2}\Rightarrow c=\mp\frac{1}{2}$$

9) $\begin{cases}x-ky & =3\\ x+y+z & =2\\ kx+y-z=1\end{cases}$ la matrice incompleta associata al sistema è $\begin{pmatrix}1 & -k & 0\\ 1 & 1 & 1\\ k & 1 & -1\end{pmatrix}$ il cui determinante vale det(incompleta) = $-1-k^2-1-k=-k^2-k-2$; proviamo a imporre l'annullamento del determinante ossia $k^2+k+2=0$, $\Delta=1-8<0$ si vede che il sistema è a pieno rango e quindi per Rouché-Capelli ammette 1 ed 1 sola soluzione dipendente dal parametro *k*.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3 & -k & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{-k^2-k-2}=\frac{-3-k-3-2k}{-k^2-k-2}=\frac{-3k-6}{-k^2-k-2}=\frac{3k+6}{k^2+k+2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ k & 1 & -1\end{vmatrix}}{-k^2-k-2}=\frac{-2+3k-1+3}{-k^2-k-2}=\frac{3k}{-k^2-k-2}=-\frac{3k}{k^2+k+2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -k & 3\\ 1 & 1 & 2\\ k & 1 & 1\end{vmatrix}}{-k^2-k-2}=\frac{1-2k^2+3-3k-2+k}{-k^2-k-2}=\frac{-2k^2-2k+2}{-k^2-k-2}=\frac{2k^2+2k-2}{k^2+k+2}$$

10) Poiché l'insieme delle parti ha cardinalità pari a 2^n con *n* gli elementi dell'insieme di partenza l'unica risposta possibile è la (c).