TEMA 1

- Studiare la funzione

$$f(x) = e^{(-x^2+6\,log\,x)}$$

- Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!}$$

- Discutere la compatibilità del seguente sistema lineare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} kx + y + (1+k)z = 0 \\ x + ky + 2z \ = 1 + k \end{cases}$$

- Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in ogni punto interno. Giustificare l'affermazione: *"se $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in]a, b[$, le due funzioni differiscono per una costante in tutto $[a, b]$."*

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Soluzioni Tema 1

1) $f(x) = e^{(-x^2+6\log x)}$; C. E. $x > 0$.

$\lim_{x\to 0^+} e^{(\overset{\to 0^-}{-x^2}+(\overset{\to -\infty}{6\log x}))} = 0$;

$\lim_{x\to+\infty} e^{(-x^2+6\log x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\overset{\to+\infty}{x^2}\left(\overset{\to -1}{-1+6\frac{\log x}{x^2}}\right)} = 0$; $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

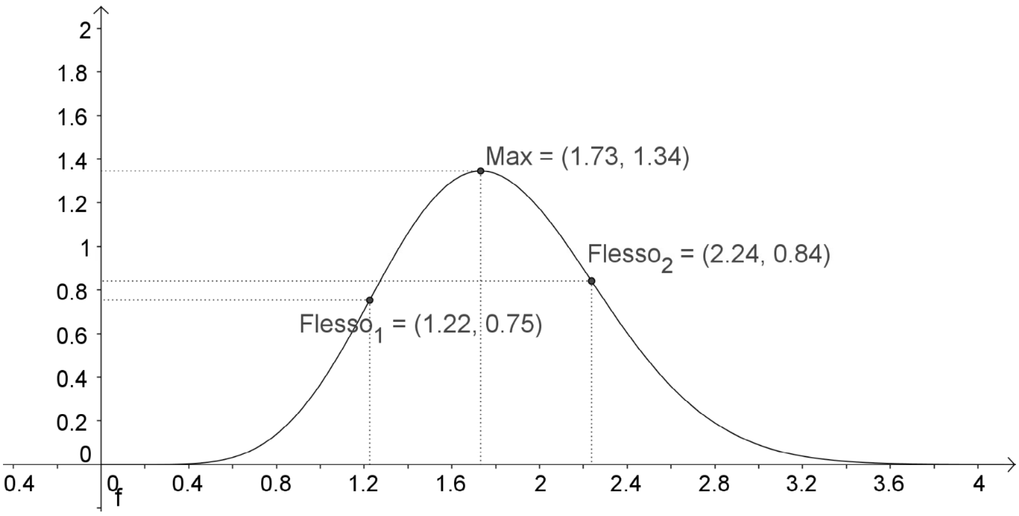
$f'(x) = e^{(-x^2+6\log x)}\left(-2x+\frac{6}{x}\right) = e^{(-x^2+6\log x)}\frac{-2x^2+6}{x}$ con C. E. $x > 0$

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow -2x^2+6 \geq 0 \Rightarrow -2x^2 \geq -6 \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow \left(-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\right) \cap (x > 0) \Rightarrow x \leq \sqrt{3}$; da cui $f(x)$ è strettamente crescente per $0 < x < \sqrt{3}$ strettamente decrescente per $x > \sqrt{3}$ e assume massimo relativo in $x = \sqrt{3} = 1.73$ con $f\left(\sqrt{3}\right) = e^{-3+6\log\sqrt{3}} = e^{-3+3\log 3} = e^{-3}e^{\log 3^3} = \frac{27}{e^3} = 1.34$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} e^{(-x^2+6\log x)}\frac{-2x^2+6}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(-2x^2+6)x^6}{xe^{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(-2x^2+6)x^5}{e^{x^2}} = 0$$

da cui si evidenzia che la funzione esce dal punto $x = 0$ con tangente destra orizzontale.

Dalla presenza dell'asintoto, della tangente destra orizzontale in $x = 0$ e dalla posizione del massimo si evince la presenza dei due flessi indicati in figura.



$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)}{n!}$$

per studiare la serie applichiamo il criterio del rapporto sotto forma di limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1 \text{ la serie diverge.}$$

$$3)\ \begin{cases} kx+y+(1+k)z = 0 \\ x+ky+2z = 1+k \end{cases}$$

Data la matrice incompleta $\begin{pmatrix} k & 1 & 1+k \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix}$ analizziamo i minori di ordine 2 estraibili:

a) $\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2-1 = 0$ se $k = \mp 1$

b) $\begin{vmatrix} k & 1+k \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k-1-k = k-1 = 0$ se $k = 1$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1+k \\ k & 2 \end{vmatrix} = 2-k-k^2 = 0 \Rightarrow k^2+k-2 = 0$ se $k = -2 \wedge k = 1$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Come si vede i tre minori di ordine 2 della matrice incompleta si annullano contemporaneamente se $k = 1$.

Analizziamo il rango della matrice completa per tale valore di k.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Orliamo un qualunque elemento della matrice incompleta con i termini noti:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$ e quindi il Rango(Completa)>Rango(Incompleta).

Il sistema è compatibile di rango 2 (con ∞^1soluzioni) per $k \in \mathbb{R} / \{1\}$; incompatibile per $k = 1$

4) Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in ogni punto interno. Giustificare l'affermazione: *"se $f'^{(x)} = g'(x)$ le due funzioni differiscono per una costante in tutto $[a, b]$"*:

è una conseguenza del teorema di Lagrange. Considerando la funzione ausiliaria $h(x) = f(x) - g(x)$ si vede subito che $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ nell'aperto $]a, b[$ e quindi poiché $h'(x) = 0$ presi due qualunque punti $x_1, x_2 \in]a, b[\Rightarrow \frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1} = 0 \Rightarrow h(x_2) = h(x_1) = costante$ da cui $f(x)$ e $g(x)$ differiscono per una costante.

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.