TEMA A

1) **[6]** Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 \log x$$

2) **[3]** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^3} \right)^{-x^3}$$

3) **[3]** Scegliere la risposta corretta e giustificarla. Dato l'insieme:

$$A = \left\{ \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right) n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

e sapendo che esso rappresenta il coinsieme di una successione strettamente decrescente, l'estremo inferiore di A:

a) non esiste; b) è < 2 c) è 1 d) è >2

4) **[3]** Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x| - x} - (|x| + x)^2$$

valutarne la continuità e la derivabilità una volta definito il suo dominio.

5) **[3]** Le soluzioni dell'equazione

$$2000^3 - 1999 \cdot 2000^2 - 1999^2 \cdot 2000 + 1999^3 = x^2 + 30$$

sono (*si consiglia di raggruppare e semplificare quanto più possibile i termini a primo membro*):

a) due opposte; b) due negative; c) nessuna soluzione; d) una soluzione;

6) **[1]** Decomporre il polinomio $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ e studiare dove esso è **strettamente** positivo.

7) **[4]** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{3^n + 5^n}$$

8) **[3]** Data la funzione

$$f(x) = \log(x + 1)$$

calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 4.

9) **[3]** Discutere la compatibilità del seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y - z = k \\ kx - y = 1 \\ x - ky + z = 2 \end{cases}$$

10) **[1]** Sia A un insieme con 3 elementi e B un insieme con 4 elementi allora il prodotto cartesiano $A \times B$ sarà costituito da un insieme con:

a) 12 elementi; b) 12 coppie ordinate; c) 7 elementi; d) 7 coppie ordinate;

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' <u>obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30</u>.**

Soluzioni Tema A

1) $f(x) = x^2 \log x$; C.E. $x > 0$, inoltre $f(x) \geq 0\ \forall x \geq 1$ con $f(1) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0^- ;$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 \log x = +\infty;\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \log x}{x} = \lim_{x\to +\infty} x \log x = +\infty;\ \Rightarrow \text{non esiste asintoto obliquo}$$

$$f'(x) = 2x \log x + \frac{x^2}{x} = 2x \log x + x = x(2\log x + 1);\quad \text{con C.E. } x > 0;$$

Evidentemente, poiché $x > 0$, nel dminio, si avrà che $f'(x) \geq 0$ per $2\log x + 1 \geq 0$ ossia $\log x \geq -\frac{1}{2}$; da cui $x \geq e^{-\frac{1}{2}}$ o equivalentemente $x \geq \frac{1}{\sqrt{e}} \tilde{=} 0.61$ da cui

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & \cdots\cdots & \frac{1}{\sqrt{e}} & \cdots\cdots \\ f'(x) & \vdots & - & \vdots & + \\ f(x) & \vdots & \searrow & \vdots & \nearrow \\ & & & \text{min} & \end{array}$$

con minimo relativo in $\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}, -\frac{1}{2\mathrm{e}}\right) \equiv (0{,}61, -0.18)$

Inoltre visto che $f(x) \to 0$ per $x \to 0^+$ si valuta il limite della derivata prima alla destra di $x = 0$:

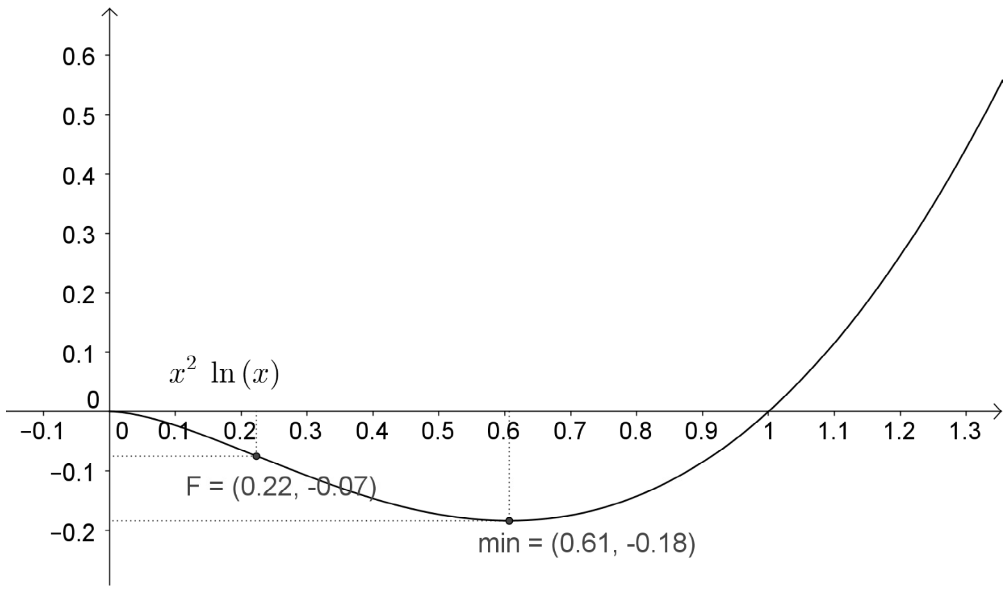
$$\lim_{x\to 0^+} 2x \log x + x = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\log x}{\frac{1}{x}} + x = 0 \ \text{ poiché } \lim_{x\to 0^+} \frac{2\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -2x = 0$$

$$f''(x) = 2\log x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\log x + 3\text{, con C.E. } x > 0$$

$$f''(x) \geq 0 \text{ se } 2\log x + 3 \geq 0 \quad \text{ossia} \quad \log x \geq -\frac{3}{2} \quad \text{da cui} \quad x \geq \frac{1}{e\sqrt{e}} \quad \text{con un Flesso in} \left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right) \equiv$$

$$\equiv (0.22, -0.07) \ \text{ con tangente obliqua } \ f'\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = -0.45$$

prima di questo flesso la funzione rivolge la concavità verso il basso mentre dopo il flesso rivolge la concavità verso l'alto.



Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' <u>obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30</u>.**

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3}\right)^{-x^3} = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{-x^3} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-x^3}\right)^{-x^3} = e$

3) $A=\left\{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)n : n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$ è il coinsieme di una successione notevole, strettamente decrescente

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \log 2 = 0.69 \text{ e la risposta corretta è la (b).}$$

4) Data $f(x)=\sqrt{|x|-x}-(|x|+x)^2$ evidentemente bisogna imporre l'argomento della radice non negativo: $|x|-x\geq 0 \Rightarrow |x|\geq x$, sempre vera per tutti i reali. Quindi C.E. $x\in\mathbb{R}$ ed in esso la funzione è continua con $f(0)=0$; dobbiamo valutare la derivabilità. A tal fine esplicitiamo la $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-x}+(x+x)^2 & \text{per } x\geq 0\\ \sqrt{-x-x}+(-x+x)^2 & \text{per } x<0\end{cases} = \begin{cases}4x^2 & \text{per } x\geq 0\\ \sqrt{-2x} & \text{per } x<0\end{cases}$$

la sua derivata è

$$f'(x)=\begin{cases}8x^2 & \text{per } x>0\\ \dfrac{-2}{2\sqrt{-2x}} & \text{per } x<0\end{cases} = \begin{cases}8x^2 & \text{per } x>0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{-2x}} & \text{per } x<0\end{cases}$$

evidentemente la funzione non è derivabile in $x=0$

$\lim_{x\to 0^-}-\frac{1}{\sqrt{-2x}}=-\infty;$ mentre $\lim_{x\to 0^+}8x^2=0$

5) $2000^3-1999\cdot 2000^2-1999^2\cdot 2000+1999^3=x^2+30 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2000^2(2000-1999)-1999^2(2000-1999)=x^2+30\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2000^2-1999^2=x^2+30\Rightarrow(2000-1999)(2000+1999)=x^2+30\Rightarrow 3999=x^2+30\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=3969\Rightarrow x=\pm 63$

La risposta corretta è la (a).

6) Il polinomio x^3-2x^2-4x+8 ha possibili radici razionali $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$, si vede subito che $x=2$ è uno zero. Utilizziamo Ruffini

	1	-2	-4	8
2		2	0	-8
	1	0	-4	0

ossia $x^3+5x^2+3x-9=(x-2)(x^2-4)=(x-2)(x-2)(x+2)=(x-2)^2(x+2)>0$
se $x+2>0$ ossia

$$x>-2\wedge x\neq 2$$

7) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n}{3^n+5^n}$ Il termine generale della serie è una successione infinitesima, per il carattere applichiamo il criterio della radice: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n}{3^n+5^n}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4}{5}\right)^n\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{5}\sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}}=\frac{4}{5}<1$

Come si vede per il criterio della radice la serie converge poiché il valore del limite è minore di 1.

8) $f(x)=\log(x+1)$ è definita in$c$. Studiamo le derivate:

$$f(x)=\log(x+1)\,;f'(x)=\frac{1}{x+1};f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2};f'''(x)=\frac{2}{(x+1)^3};f'^{v}(x)=-\frac{6}{(x+1)^5}$$

I cui valori calcolati in $x = 0$ sono i seguenti

$$f(0) = 0; f'(0) = 1; f''(0) = -1; f'''(x) = 2; f'^{v}(x) = -6$$

e quindi il polinomio di Mac Laurin di quarto ordine è il seguente:

$$P_4(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{6x^4}{4!} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

9) $\begin{cases} x + y - z & = k \\ kx - y & = 1 \\ x - ky + z = 2 \end{cases}$ la matrice incompleta associata al sistema è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ k & -1 & 0 \\ 1 & -k & 1 \end{pmatrix}$ il cui determinante vale det(incompleta) = $-1 + k^2 - 1 - k = k^2 - k - 2$; proviamo a imporre l'annullamento del determinante ossia $k^2 - k - 2 = 0$, $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$ da cui si ottiene $k = \frac{1 \mp 3}{2} =< \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$. Se $k \in \mathbb{R} \,/\, \{-1,2\}$ il sistema è a pieno rango e quindi per Rouché-Capelli ammette 1 ed 1 sola soluzione dipendente dal parametro k. Analizziamo cosa succede per $k = -1$ oppure per $k = 2$ in termini di rango delle matrici completa e incompleta:

$k = -1)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ un minore non nullo della incompleta è sicuramente $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ se orliamo con la colonna dei termini noti, si ottiene $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 1 - 1 - 2 = -3$ ossia il rango della matrice completa è 3 mentre quello della completa è 2, quindi il sistema è incompatibile.

$k = 2)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$ un minore non nullo della incompleta è sicuramente $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$ se orliamo con la colonna dei termini noti, si ottiene $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 - 8 + 2 + 2 - 4 = -9$ ossia il rango della matrice completa è 3 mentre quello della completa è 2, quindi il sistema è incompatibile.

Concludendo il sistema lineare è incompatibile nel caso $k = -1$ e $k = 2$,compatibile e a pieno rango per gli altri valori di k.

10) Poiché dal prodotto cartesiano $A \times B$ si ottengono coppie ordinate del tipo (a, b) con $\forall a \in A, \forall b \in B$ la risposta corretta è la (b).

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30.**