TEMA 1

- Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x$$

- Data la funzione $f(x) = 2x^2 + \log x$, si verifichi che è invertibile per ogni $x > 0$. Detta $x = g(y)$ la funzione inversa di $y = f(x)$, si calcoli la derivata di $g(y)$ nel punto $y = f(1)$.

- Studiare al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$, la successione di termine generale

$$a_n = (\operatorname{sen} x)^n$$

- Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, quando il sistema ammette autosoluzioni:

$$\begin{cases} x + (a-1)y + z = 0 \\ a(a-1)x + 4ay = 0 \\ (a - a^2 + 1)x + (a-1)y + z = 0 \end{cases}$$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Soluzioni Tema 1

1) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-x$; $\mathrm{C.E.}\, x\in\mathbb{R}$ dato che x^2+2x+4 ha delta negativo.

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}-x=+\infty$;

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}-1=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x^2+2x+4}{x^2}}-1=-2;$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}-x+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+4-x^2}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}\frac{2+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1}=-1\frac{2}{2}=-1\Rightarrow$$

$\Rightarrow y=-2x-1$ asintoto obliquo sx

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+4-x^2}{\sqrt{x^2+2x+4}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1}=\frac{2}{2}=1\Rightarrow y=1 \text{ asintoto orizzontale dx}$$

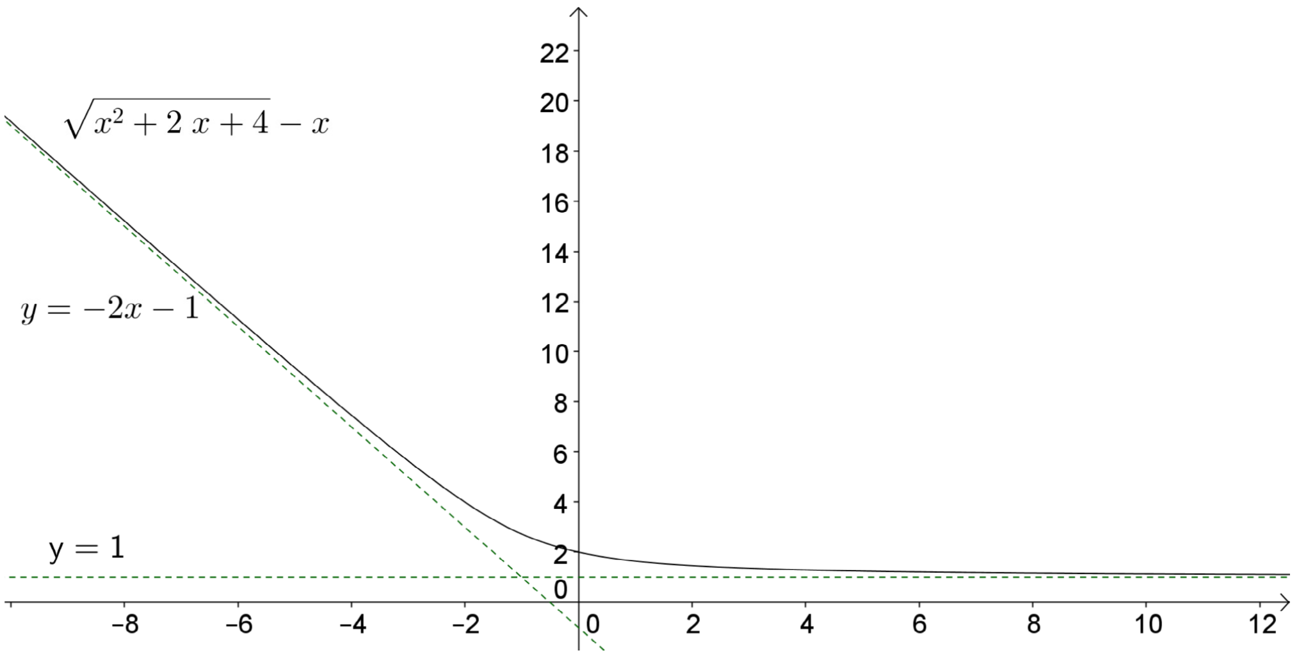
$$f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+4}}-1=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}-1=\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+4}}{\sqrt{x^2+2x+4}}\geq 0$$

$f'(x)\geq 0\Rightarrow\ x+1-\sqrt{x^2+2x+4}\geq 0\Rightarrow x+1\geq\sqrt{x^2+2x+4}\Rightarrow$

Se $x+1\leq 0$ ossia $x\leq -1$ mai vera;

Se $x+1>0\Rightarrow x^2+2x+1>x^2+2x+4\Rightarrow 1\geq 4$ mai vera da cui $f'(x)<0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Tenendo conto che $f(0)=2$ il grafico della funzione è il seguente:



2) $f(x)=2x^2+\log x$ sfrutto la condizione sufficiente per la monotonia in $x>0$ ossia

$f'(x)=4x+\frac{1}{x}=\frac{4x^2+1}{x}>0$ nel dominio, inoltre è evidente che $f(x)$ è strettamente crescente

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Poiché $f(1) = 2 + \log 1 = 2 = y \Rightarrow g'(2) = \left[\frac{x}{4x^2+1}\right]_{x=1} = \frac{1}{5}$

3) $a_n = (\operatorname{sen} x)^n$ è una successione geometrica. Nel caso specifico $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$ quindi

$|\operatorname{sen} x| < 1$ converge a zero, ossia $x \in \mathbb{R} / \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\operatorname{sen} x = 1$ converge a 1, ossia $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\operatorname{sen} x = -1$ non ammette limite, ossia $x \in \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

4) $\begin{cases} x + (a-1)y + z = 0 \\ a(a-1)x + 4ay = 0 \\ (a - a^2 + 1)x + (a-1)y + z = 0 \end{cases}$ è sempre compatibile. Per avere autosoluzioni deve essere nullo

il determinante di A: $\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ a(a-1) & 4a & 0 \\ a - a^2 + 1 & a-1 & 1 \end{vmatrix} = 4a + \cancel{a(a-1)^2} - 4a(a - a^2 + 1) - \cancel{a(a-1)^2} =$

$= \cancel{4a} - 4a^2 + 4a^3 - \cancel{4a} = 4a^3 - 4a^2 = 0$ per $a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$

solo per questi valori di a il sistema ammette autosoluzioni.

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.