TEMA 2

- Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-x^2 + \log x + 2}$$

- Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(-x^2 + 4x - 3) & \text{per } 1 < x \leq 2 \\ (x-2)^h \operatorname{sen}(x-2) & \text{per } \quad x > 2 \end{cases}$$

determinare i valori di h per i quali la funzione risulta continua nel dominio.

- Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\log a)^n$$

considerando che $a > 1$.

- Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, quando il sistema ammette autosoluzioni:

$$\begin{cases} (a - a^2 + 2)x + (3a - 2)y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ a(a-1)x - ay = 0 \end{cases}$$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Soluzioni Tema 2

1) $f(x) = e^{-x^2+\log x+2}$; C. E. $x > 0$. Si noti che $e^{-x^2+\log x+2} = \dfrac{xe^2}{e^{x^2}}$ che è una forma alternativa usabile nel dominio $x > 0$.

$\lim_{x\to 0^+} e^{(\overset{\to 0^-}{-x^2} + \overset{\to -\infty}{(\log x)}+2)} = 0^+$;

$\lim_{x\to +\infty} e^{(-x^2+\log x+2)} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{xe^2}{e^{x^2}} = 0^+$ (dato il grado di infinito); $y = 0$ è asintoto orizzontale dx .

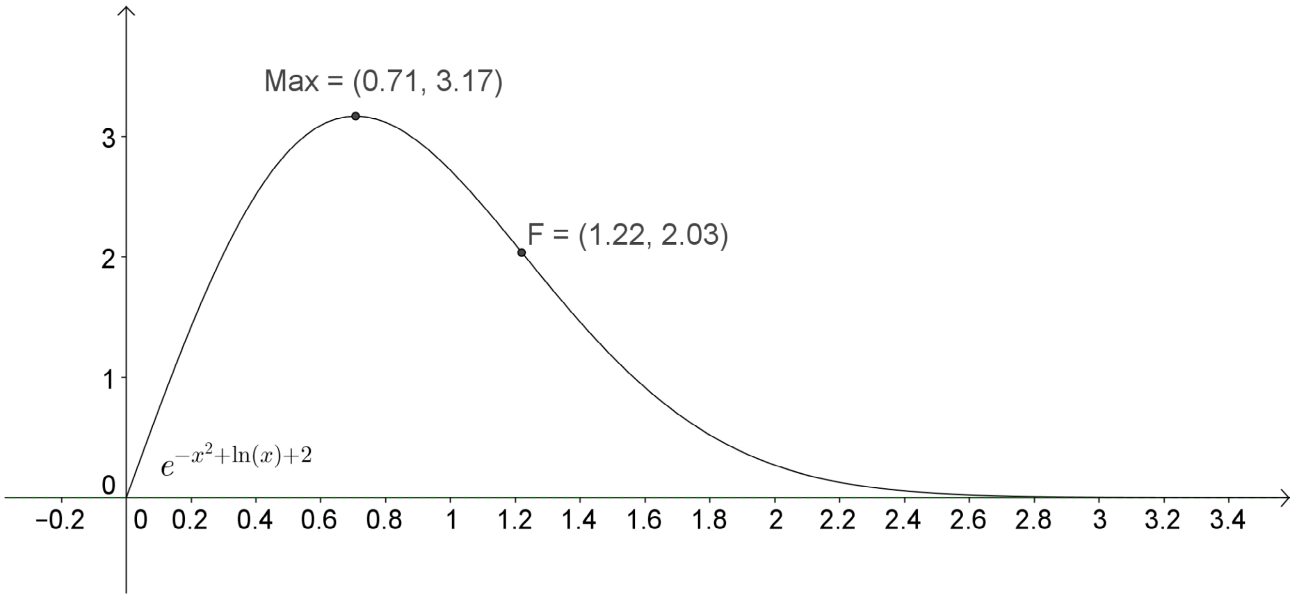
$f'(x) = e^{-x^2+\log x+2}\left(-2x + \dfrac{1}{x}\right) = e^{-x^2+\log x+2}\dfrac{1-2x^2}{x}$ con C. E. $x > 0$

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow\ 1 - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cap (x > 0) \Rightarrow 0 < x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

$f(x)$ è strettamente crescente per $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$; strettamente decrescente per $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$; assume massimo relativo in Max $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{2}}\right) = (0.71, 3.17)$. Inoltre:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-x^2+\log x+2}\frac{1-2x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}e^2}{e^{x^2}}\frac{1-2x^2}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^2\frac{1-2x^2}{e^{x^2}} = e^2$$

da cui si evidenzia che la funzione esce dal punto $x = 0$ con tangente destra positiva.
Dai dati raccolti si evince la presenza di un flesso indicato in figura.



2) $f(x) = \begin{cases} \log(-x^2+4x-3) & \text{per } 1 < x \leq 2 \\ (x-2)^h \operatorname{sen}(x-2) & \text{per } \quad x > 2 \end{cases}$ verifico il dominio per la parte logaritmica

$-x^2 + 4x - 3 > 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 < 0;\ \dfrac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1 \Rightarrow x = 2 \mp 1 =< \begin{matrix}1\\3\end{matrix} \Rightarrow 1 < x < 3 \cap 1 < x \leq 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 < x \leq 2$

Quindi la funzione è continua nei suoi sottodomini. Per assicurare la continuità deve succedere
$f(2) = \log(-4+8-3) = \log 1 = 0 = \lim_{x\to 2^+}(x-2)^h \operatorname{sen}(x-2) = 0\ \forall h \geq 0$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\log a)^n$ con $a > 1$ (N. B. ciò vuol dire: $\log a > 0$) applico il criterio della radice

$\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{n(\log a)^n} = \lim_{n\to +\infty} \log a\,\sqrt[n]{n} = \log a < 1$ per assicurare la convergenza da cui

Se $1 < a < e$ la serie converge, mentre se $a > e$ la serie diverge.

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Se $a = e \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(\log e)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$ che evidentemente diverge.

4) $\begin{cases} (a-a^2+2)x + (3a-2)y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ a(a-1)x - ay = 0 \end{cases}$ il sistema ammette autosoluzione se non è a pieno rango $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a-a^2+2 & 3a-2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ a(a-1) & -a & 0 \end{vmatrix} = a(a-1)(3a-2) - 2a + 2a(a-1) + a(a-a^2+2) =$$

$= 3a^3 - 5a^2 + \cancel{2a} - \cancel{2a} + 2a^2 - \cancel{2a} + a^2 - a^3 + \cancel{2a} = 2a^3 - 2a^2 = 0 \Rightarrow a^2(a-1) = 0$ ossia il sistema ammette autosoluzioni per $a = 0 \lor a = 1$.

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.