TEMA A

1) **[6]** Studiare la funzione

$$f(x) = xe^x$$

2) **[3]** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(x-1)}{\sqrt[3]{x-2}}$$

3) **[3]** Scegliere la risposta corretta e giustificarla. Dato l'insieme:

$$A = \left\{(-1)^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$$

e sapendo che esso rappresenta il coinsieme di una successione, l'estremo inferiore di A:

a) non esiste; b) è = 1 c) è = -1 d) è > 1

4) **[3]** Data la funzione

$$f(x) = (x^3 + |x|^3)^{\frac{1}{3}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

valutarne la continuità e la derivabilità nel suo dominio.

5) **[3]** Le soluzioni dell'equazione

$$\arctan\left(\frac{1}{|x|}\right) = e^{-1}$$

sono:

a) nessuna; b) due opposte; c) una; d) due negative;

6) **[1]** Decomporre il polinomio $x^3 - x^2 - x + 1$ e studiare dove esso è strettamente positivo.

7) **[4]** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt[3]{\operatorname{sen}^5\left(\frac{1}{n}\right)}$$

8) **[3]** Data le funzioni

$$f(x) = 2x^3 - 2x + 1; \qquad g(x) = x^3 + x;$$

in [1, 2] controllare che esse verifichino il Teorema di Cauchy e, in caso affermativo, calcolare l'ascissa dei punti che verificano il teorema.

9) **[3]** Trovare per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ il sistema ammette autosoluzioni e calcolarle

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 4x + hz = 0 \end{cases}$$

10) **[1]** Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 < 16\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: x > 10\}$ l'intersezione fra essi è:

a) $\{x \in \mathbb{R}: 4 < x < 10\}$; b) $\{x \in \mathbb{R}: x < 10\}$; c) $\{x \in \mathbb{R}: x > -4\}$; d)l'insieme vuoto;

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30.**

Soluzioni Tema A

1) $f(x) = xe^x$; C.E. $x \in \mathbb{R}$, inoltre $f(x) > 0\ \forall x > 0, f(x) < 0\ \forall x < 0, f(0) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{\to-\infty} \underbrace{e^x}_{\to 0^+} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{x}^{\to-\infty}}{\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}} = 0^-$; perché il denominatore è infinito di ordine superiore. Asint. oriz. sx

$\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$; $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\Rightarrow$ non esiste asintoto obliquo

$f'(x) = e^x + x\,e^x = e^x(x+1) \geq 0$ per $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

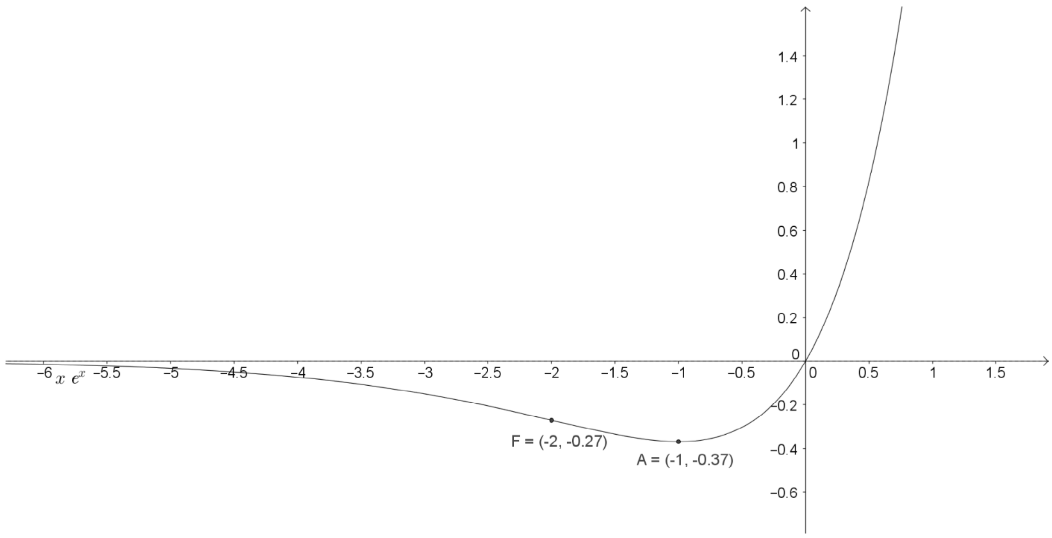
	……	-1	……
$f'(x)$	$-$	⋮	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

con minimo relativo in $\left(-1, -\frac{1}{e}\right) \equiv (-1, -0.37)$

$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x = e^x(x+2) \geq 0$ per $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

	……	-2	……
$f''(x)$	$-$	⋮	$+$
$f(x)$	$\cap$	F	$\cup$

$f'(-2) = -\frac{1}{e^2}$ con un Flesso in $F\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right) \equiv (-2, -0.27)$ con tangente obliqua $f'(-2) = -\frac{1}{e^2}$



2) $\lim_{x\to2} \frac{\log(x-1)}{\sqrt[3]{x-2}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to2} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}} = \lim_{x\to2} \frac{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x-1} = 0$

3) $A = \left\{(-1)^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots\right\}$ e si vede che $\inf A = -1$ ossia la risposta (c).

4) Data $f(x) = (x^3 + |x|^3)^{\frac{1}{3}}$ evidentemente definita per tutti i reali. Quindi C.E. $x \in \mathbb{R}$ ed in esso la funzione è continua; dobbiamo valutare la derivabilità. A tal fine esplicitiamo la $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 + x^3} & \text{per } x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x^3 - x^3} & \text{per } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt[3]{2x^3} & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}x & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30.**

la sua derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{2} \text{ per } x > 0 \\ 0 \quad \text{per } x < 0 \end{cases}$$

ed evidentemente la funzione non è derivabile in $x = 0$ dato che

$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$; mentre $\lim_{x\to 0^-} 0 = 0$

5) $\arctan\left(\frac{1}{|x|}\right) = e^{-1} \Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{|x|}\right) = \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{|x|} = \tan\frac{1}{e} > 0 \Rightarrow |x| = \frac{1}{\tan\frac{1}{e}} \Rightarrow x = \mp\frac{1}{\tan\frac{1}{e}}$

La risposta corretta è la (b).

6) Il polinomio $x^3 - x^2 - x + 1$ ha possibili radici razionali ± 1, si vede subito che $x = 1$ è uno zero. Utilizziamo Ruffini

	1	-1	-1	1
1		1	0	-1
	1	0	-1	0

ossia $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1) > 0$
se $x + 1 > 0$ ossia

$$x > -1 \wedge x \neq 1$$

7) $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt[3]{\operatorname{sen}^5\left(\frac{1}{n}\right)}$ la serie si può riscrivere come $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{3}}$ se la confronto con la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ convergente

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{3}}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{5}{3}} = 1$$

Come si vede le due serie hanno lo stesso carattere ossia la serie in oggetto converge.

8) $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$; $g(x) = x^3 + x; \forall x \in [1,2]$. Le funzioni sono continue in $[1,2]$ e sicuramente derivabili nel suo aperto. Le derivate sono: $f'(x) = 6x^2 - 2; g'(x) = 3x^2 + 1$. Applichiamo il Teorema di Cauchy:

$$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \frac{13-1}{10-2} = \frac{6x^2-2}{3x^2+1} \Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{6x^2-2}{3x^2+1} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{6x^2-2}{3x^2+1} \Rightarrow \frac{6x^2-2}{3x^2+1} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12x^2-4-9x^2-3}{6x^2+2} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2-7}{6x^2+2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow x = \mp\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Poiché i punti trovati devono essere interni all'intervallo $[1,2]$, l'unico valore valido è $x^* = \sqrt{\frac{7}{3}}$

9) $\begin{cases} x - y - z &= 0 \\ 3x + y + 2z &= 0 \\ 4x + hz &= 0 \end{cases}$ poiché si tratta di un sistema lineare omogeneo (per il quale la compatibilità è sempre assicurata, al fine di ottenere le autosoluzioni basta imporre che il determinante della matrice incompleta sia nullo $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & h \end{vmatrix} = h - 8 + 4 + 3h = 4h - 4 = 0 \Rightarrow h = 1$. Le autosoluzioni quindi possono individuarsi eliminando la terza equazione e considerando le prime due righe, prime due colonne. Il sistema diventa quindi:

$\begin{cases} x - y = z \\ 3x + y = -2z \end{cases}$ con $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$. Utilizzando Cramer

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} z & -1 \\ -2z & 1 \end{vmatrix}}{4} = \dfrac{z - 2z}{4} = -\dfrac{z}{4};\ \ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 3 & -2z \end{vmatrix}}{4} = \dfrac{-2z - 3z}{4} = -\dfrac{5}{4}z; z \in \mathbb{R}$

10) $A \Rightarrow -4 < x < 4 \text{ mentre } B \Rightarrow x > 10$ e quindi la loro intersezione è l'insieme vuoto ossia la risposta corretta è la (d).

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' <u>obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30</u>.**