TEMA B

1) **[6]** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$$

(*non effettuare la derivata seconda ma tenere conto che essa non si annulla mai nel suo dominio*)

2) **[3]** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|\log x|^5}{(x^2-1)^5}$$

3) **[3]** Scegliere la risposta corretta e giustificarla. Dato l'insieme:

$$A = \left\{ \left(\frac{1+n}{n} \right)^{n+1} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

e sapendo che esso rappresenta il coinsieme di una successione strettamente decrescente, l'estremo inferiore di A:

a) non esiste; b) è < 1 c) è = 1 d) è > 1

4) **[3]** Data la funzione

$$f(x) = (x + |x|)^{\frac{7}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

valutarne la continuità e la derivabilità nel suo dominio.

5) **[3]** Le soluzioni dell'equazione

$$-\log_3 x^4 = 67e^{93} \quad (\text{con } x \in \mathbb{R} \, / \, \{0\})$$

sono:

a) nessuna; b) una; c) due; d) quattro;

6) **[1]** Decomporre il polinomio biquadratico $x^4 - 4x^2 + 4$ e studiare dove esso è strettamente positivo.

7) **[4]** Studiare il carattere della serie al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^{-n}$$

8) **[3]** Data la funzione

$$f(x) = (x-2)e^{-2x}$$

verificare le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo [1, 3].

9) **[3]** Trovare le soluzioni del sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - y + z = k \\ x + ky + z = 1 \end{cases}$$

10) **[1]** Siano A e B due insiemi finiti e sia $|\cdot|$ il simbolo che ne indica la cardinalità: quando può succedere che $|A \cap B| = |A|$?

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30.**

Soluzioni Tema B

1) $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$; C.E. $x \in \mathbb{R}/\{0\}$. Inoltre $f(-x) = \dfrac{e^{(-x)^2}}{-x} = -\dfrac{e^{x^2}}{x} = -f(x)$ la funzione è dispari.

La studiamo in $(0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}}{x} = +\infty \Rightarrow \text{ asintoto verticale dx}$$

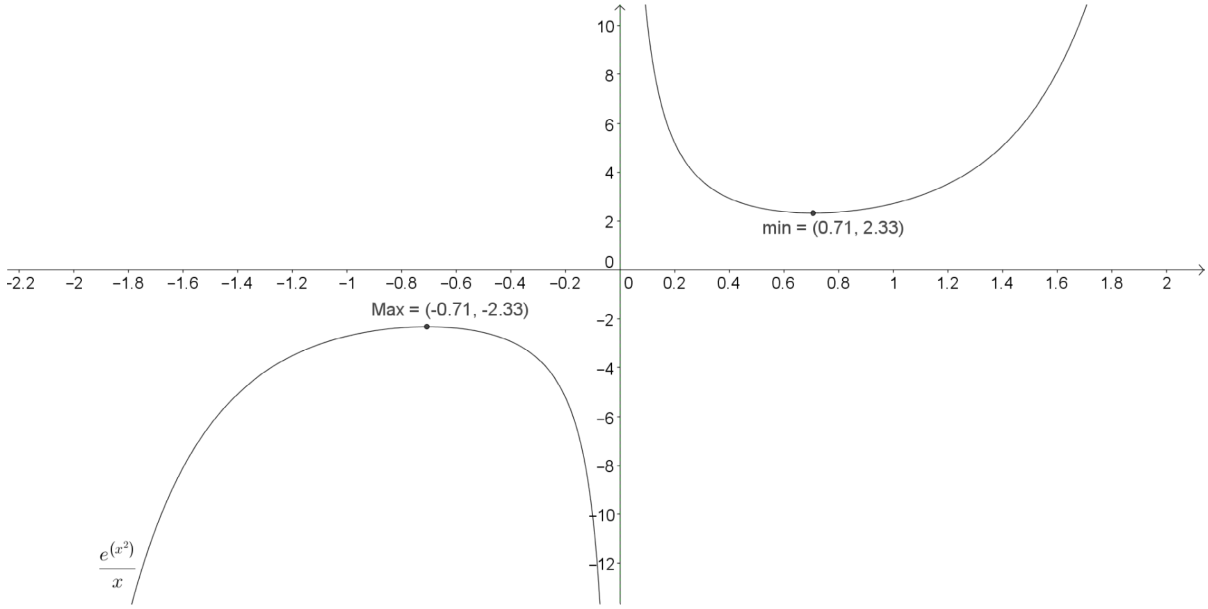
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x} = +\infty;\;\; m = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty;\; \Rightarrow \text{non esiste asintoto obliquo}$$

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2}x - e^{x^2}}{x^2} = e^{x^2}\frac{2x^2-1}{x^2} \geq 0$$

per $2x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(x \leq -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \vee x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cap x > 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{array}{cccc} & 0 \;\cdots\cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots\cdots \\ f'(x) & - & \vdots & + \\ f(x) & \searrow & \vdots & \nearrow \\ & & \text{min} & \end{array}$$

con minimo relativo in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2\mathrm{e}}\right) \equiv (0.71, 2.33)$. Tenuto conto del fatto che la derivata seconda non si annulla nel dominio e dalle informazioni fin qui ottenute, il grafico della funzione è il seguente:



2) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{|\log x|^5}{(x^2-1)^5} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\log x)^5}{(x^2-1)^5} = \left(\lim_{x\to 1^+} \frac{\log x}{x^2-1}\right)^5 \overset{\text{H}}{=} \left(\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{2x}\right)^5 = \left(\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2x^2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

3) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to +\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n} \left(\frac{1+n}{n}\right) = e \Rightarrow$ la risposta corretta è la (d)

4) Data $f(x) = (x + |x|)^{\frac{7}{2}}$ evidentemente sempre verificata per tutti i reali. Quindi C.E. $x \in \mathbb{R}$ ed in esso la funzione è continua; dobbiamo valutare la derivabilità. A tal fine esplicitiamo la $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{(x+x)^7} & \text{per } x \geq 0 \\ \sqrt{(x-x)^7} & \text{per } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{(2x)^7} & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' <u>obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30</u>.**

la sua derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{7}{\cancel{2}} \cancel{2}\sqrt{(2x)^5} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 7\sqrt{(2x)^5} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^+} 7\sqrt{(2x)^5} = 0 = \lim_{x\to 0^-} 0$ evidentemente la funzione è continua in tutti i reali.

5) $-\log_3 x^4 = 67e^{93} \quad \Rightarrow \log_3 x^{-4} = 67e^{93} \quad \Rightarrow \log_3 \frac{1}{x^4} = 67e^{93} \quad \Rightarrow \frac{\log\frac{1}{x^4}}{\log 3} = 67e^{93} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\frac{1}{x^4} = 67e^{93}\log 3 \Rightarrow \frac{1}{x^4} = e^{67e^{93}\log 3} \Rightarrow x^4 = \frac{1}{e^{67e^{93}\log 3}} \Rightarrow x^2 = \mp\frac{1}{\left(e^{67e^{93}\log 3}\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = +\frac{1}{\left(e^{67e^{93}\log 3}\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow x = \mp\frac{1}{\left(e^{67e^{93}\log 3}\right)^{\frac{1}{4}}}$ da cui si evince che la risposta corretta è la (c).

6) Per decomporre il polinomio $x^4 - 4x^2 + 4$, poniamo $t = x^2$. Otteniamo

$t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow (t-2)^2 = 0$ e poiché $x^2 = t \Rightarrow (x^2-2)^2 = 0 \Rightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)^2\left(x+\sqrt{2}\right)^2 > 0$ da cui

$$x \in \mathbb{R} \ / \left\{\mp\sqrt{2}\right\}$$

7) $\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^n$ si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{x^2}$ che converge se $\left|\frac{1}{x^2}\right| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2} < 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x < -1 \ \vee \ x > 1.$

La serie non esiste per $x = 0$, mentre diverge per $x \in [-1,0) \cup (0,1]$.

8) $f(x) = (x-2)e^{-2x} \quad \forall x \in [1,3]$. La funzione è continua in $[1,3]$ e sicuramente derivabile nel suo aperto. La derivata è: $f'(x) = e^{-2x} + (x-2)(-2)e^{-2x} = e^{-2x}(1-2x+4) = e^{-2x}(5-2x)$.

Dobbiamo verificare anche l'ipotesi agli estremi $f(a) = f(b)$:

$f(1) = (1-2)e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$; $f(3) = (3-2)e^{-6} = \frac{1}{e^6}$

L'ultima ipotesi non è rispettata.

9) $\begin{cases} x - y + z = k \\ x + ky + z = 1 \end{cases}$ consideriamo la matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$ che ha rango ≥ 1.

Consideriamo i tre minori di ordine due estraibili:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k + 1 = 0$ se $k = -1$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ sempre; $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = -1 - k = 0$ se $k = -1$

$k = -1)$ Orliamo un qualunque elemento di A: $\begin{vmatrix} -1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} = -1 - k^2 \neq 0$ ossia il sistema è incompatibile.

$k \neq -1) \begin{cases} x - y = k - z \\ x + ky = 1 - z \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} k-z & -1 \\ 1-z & k \end{vmatrix}}{k+1} = \frac{k^2 - kz + 1 - z}{k+1}; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k-z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix}}{k+1} = \frac{1-k}{k+1}, z \in \mathbb{R}$

10) Quando $A = B$