TEMA 1

- Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{4x-2}}$$

- Data la funzione $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - \frac{9}{2}x - 4 & \text{per } -\infty < x < -2 \\ \sqrt{|x+1|} & \text{per } -2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

  Quali sono i punti in cui $f(x)$ non è derivabile?

- Stabilire per quali valori del parametro a la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

  è invertibile.

- Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos x}{n^2}$$

  dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ coverge assolutamente.

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Soluzioni Tema 1

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{4x-2}}$; C.E.: $]-\infty,0]\ \cup\ ]\dfrac{1}{2},+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{4x-2}}=-\infty;$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{4x-2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{x^3}{4x^3-2x^2}}=-\frac{1}{2};$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{4x-2}}+\frac{1}{2}x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{4x-2}-\frac{x^2}{4}}{\sqrt{\frac{x^3}{4x-2}}-\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4x^3-4x^3+2x^2}{16x-8}}{\sqrt{\frac{x^3}{4x-2}}-\frac{1}{2}x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{-x\left(\sqrt{\frac{x}{4x-2}}+\frac{1}{2}\right)(16x-8)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x^2}\frac{2}{\left(\sqrt{\frac{x}{4x-2}}+\frac{1}{2}\right)(16-\frac{8}{x})}=-\frac{2}{16}=$$

$$=-\frac{1}{8}=-0.125\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\text{ asintoto obliquo sx}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\sqrt{\frac{x^3}{4x-2}}=+\infty\text{ asintoto verticale dx}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{4x-2}}=+\infty$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{4x-2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{4x^3-2x^2}}=\frac{1}{2}$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{4x-2}}-\frac{1}{2}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{4x-2}-\frac{x^2}{4}}{\sqrt{\frac{x^3}{4x-2}}+\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x^3-4x^3+2x^2}{16x-8}}{\sqrt{\frac{x^3}{4x-2}}+\frac{1}{2}x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x\left(\sqrt{\frac{x}{4x-2}}+\frac{1}{2}\right)(16x-8)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}\frac{2}{\left(\sqrt{\frac{x}{4x-2}}+\frac{1}{2}\right)(16-\frac{8}{x})}=+\frac{2}{16}=\frac{1}{8}=$$

$$=0.125\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\text{ asintoto obliquo dx}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x-2}{x^3}}\,\frac{3x^2(4x-2)-4x^3}{(4x-2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x-2}{x^3}}\,\frac{12x^3-6x^2-4x^3}{(4x-2)^2}==\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4x-2}{x^3}}\,\frac{8x^3-6x^2}{(4x-2)^2}$$

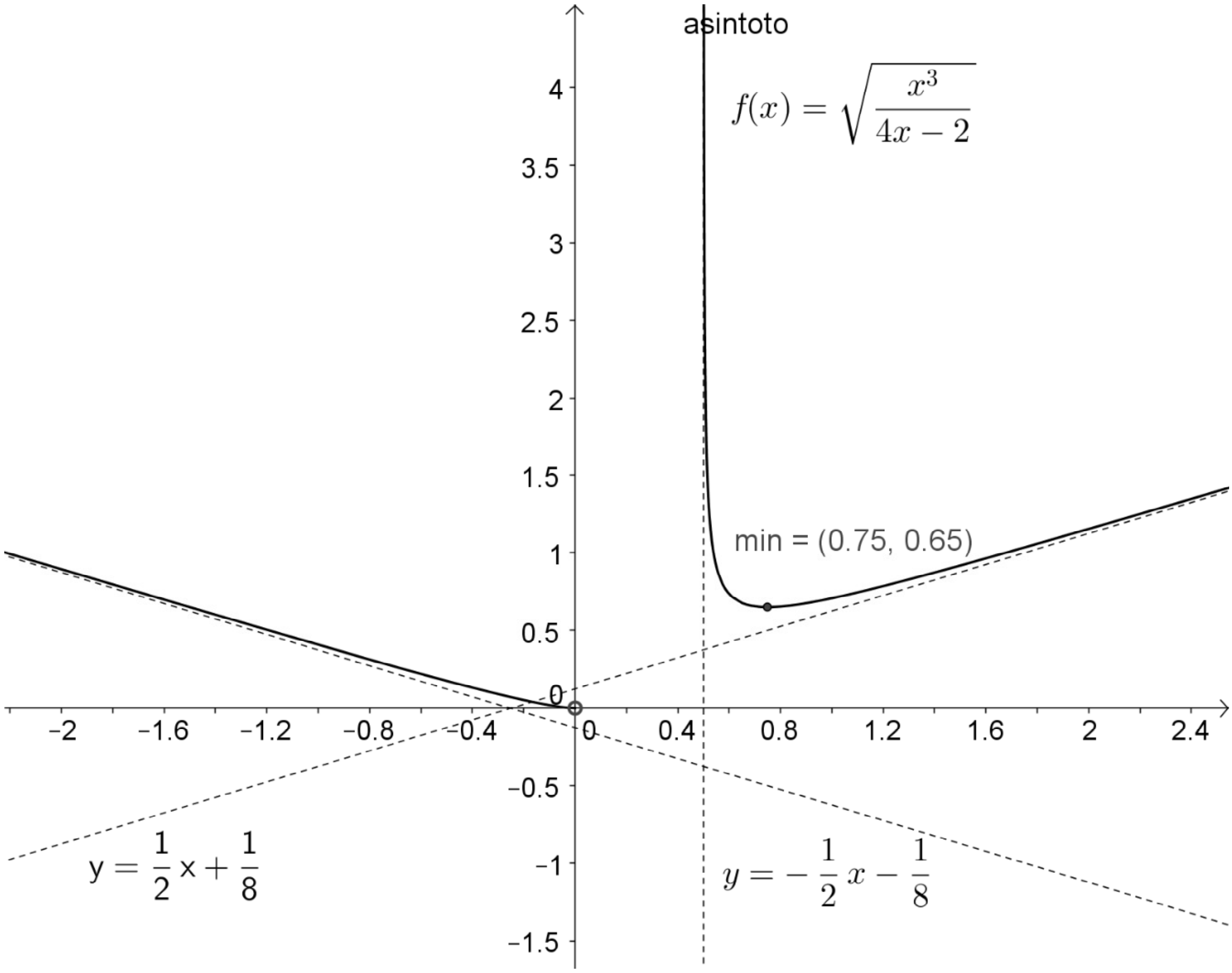
$$=\sqrt{\frac{4x-2}{x^3}}\,\frac{4x^3-3x^2}{(4x-2)^2};\quad\text{C.E.: }]-\infty,0[\ \cup\ ]\frac{1}{2},+\infty[$$

$$f'(x)\geq 0\Rightarrow\ 4x^3-3x^2\geq 0\Rightarrow x^2(4x-3)\geq 0\Rightarrow x\geq\frac{3}{4}\text{ da cui min}\left(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\equiv(0.75,0.65)$$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

inoltre $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{4x-2}{x^3}}\frac{8x^3-6x^2}{(4x-2)^2}=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{\frac{4x-2}{x^3}}x^2\frac{8x-6}{(4x-2)^2}=\lim_{x\to 0^-}-\sqrt{4x^2-2x}\,\frac{8x-6}{(4x-2)^2}=0$

da cui si evince il grafico della funzione



2) $f(x)=\begin{cases}-x^2-\frac{9}{2}x-4 & \text{per } -\infty<x<-2\\ \sqrt{|x+1|} & \text{per } -2\le x<+\infty\end{cases}$ si può riscrivere come

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-\frac{9}{2}x-4 & \text{per } -\infty<x<-2\\ \sqrt{-x-1} & \text{per } -2\le x\le -1\\ \sqrt{x+1} & \text{per } -1<x<+\infty\end{cases}$$

in $(-\infty,-2)$ la funzione è derivabile, essendo un polinomio, in $(-2,-1)$ e in $(-1,+\infty)$ è derivabile

i soli punti da analizzare sono $x=-2$ e $x=-1$. In questi punti la funzione è continua (basta fare il limite per $x\to -2^-$ che è eguale al valore $f(-2)=1$ e inoltre $f(-1)=0$. Calcoliamo la derivata

$f'^{(x)}=\begin{cases}-2x-\frac{9}{2} & \text{per } -\infty<x<-2\\ -\frac{1}{\sqrt{-x-1}} & \text{per } -2<x<-1\\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} & \text{per } -1<x<+\infty\end{cases}$ ma si vede subito che

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

$$\lim_{x\to -2^-} -2x-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}\neq \lim_{x\to -2^+} -\frac{1}{\sqrt{-x-1}}=-1$$

$$\lim_{x\to -1^-} -\frac{1}{\sqrt{-x-1}}=-\infty\neq \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}}=+\infty$$

3) Per essere $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{bmatrix}$ invertibile la matrice deve essere non singolare, ossia

$\det A = a+a-a^2\neq 0 \Rightarrow a^2-2a\neq 0\Rightarrow a(a-2)\neq 0\Rightarrow a\neq 0 \wedge a\neq 2$

4) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos x}{n^2}$ per la convergenza assoluta basta confrontarla in valore assoluto con la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

$\frac{|\cos x|}{n^2}\leq \frac{1}{n^2}\Rightarrow |\cos x|\leq 1$ sempre vera $\forall x\in\mathbb{R}$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.