TEMA A

1) **[6]** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{|x|}$$

2) **[3]** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{\frac{x^6 - 1}{x^5 - 1}}$$

3) **[3]** Scegliere la risposta corretta e giustificarla. Dato l'insieme:

$$A = \left\{ \tan\left(\frac{1}{n}\right) + 1 : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

e sapendo che esso rappresenta il coinsieme di una successione decrescente, l'estremo inferiore di A:

a) non esiste; b) è = 1 c) è < 1 d) è > 1

4) **[3]** Data la funzione

$$f(x) = (x-3)\sqrt[5]{x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

valutarne la derivabilità nel suo dominio.

5) **[3]** Le soluzioni dell'equazione

$$e^{\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\pi - 3} \quad (\text{con } x \in \mathbb{R} \,/\, \{0\})$$

sono:

a) nessuna; b) una; c) due positive; d) due opposte;

6) **[1]** Decomporre il polinomio biquadratico $x^4 + 2x^2 - 1$ e studiare dove esso è strettamente positivo.

7) **[4]** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^5 + 2)^{-n}$$

8) **[3]** Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 3 della funzione

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

9) **[3]** Trovare la matrice inversa, se esiste, della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si verifichi la correttezza del calcolo applicando il prodotto $A^{-1}A = I$

10) **[1]** Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 < 16\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 10\}$ si individui l'insieme differenza $A - B$.

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30.**

Soluzioni Tema C

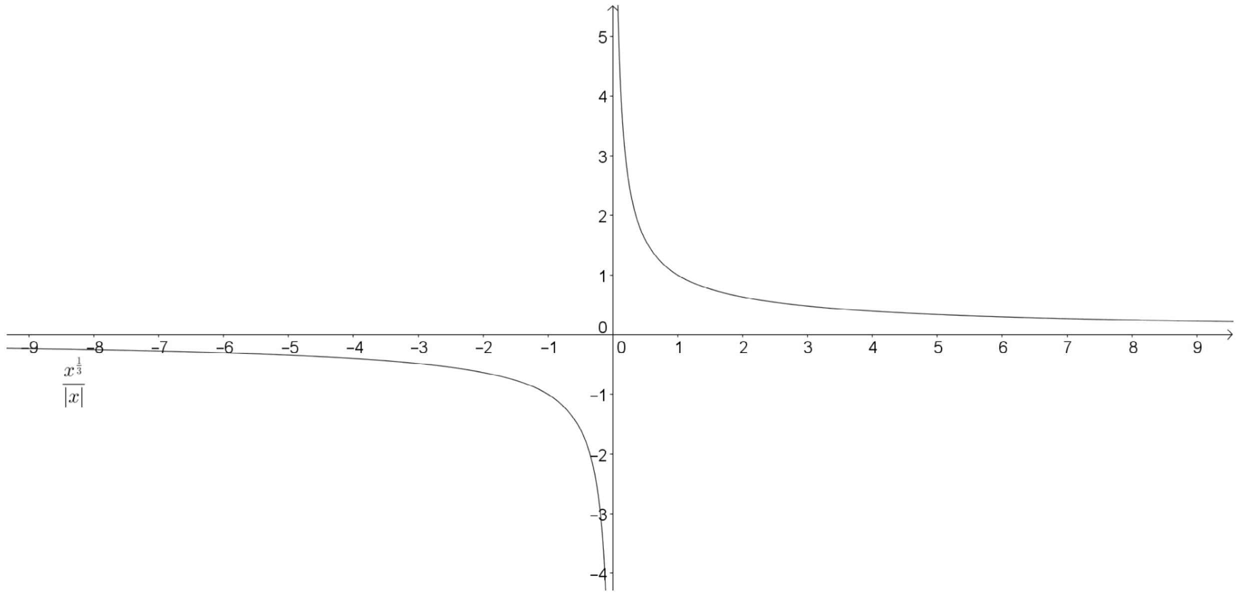
1) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{|x|}$; C.E. $x\in\mathbb{R}/\{0\}$, inoltre $f(-x)=\dfrac{-\sqrt[3]{x}}{|-x|}=-\dfrac{\sqrt[3]{x}}{|x|}=-f(x)$ funzione dispari

La studio in $(0,+\infty)$ ed essendo in tale sottodominio la x positiva posso rimuovere il valore assoluto.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=+\infty\text{ . Asintoto verticale dx.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=0^+;\ \text{ asintoto orizzontale.}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}x-\sqrt[3]{x}}{x^2}=\frac{x-3x}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}=-\frac{2x}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}<0\text{ per }x>0$$



2) $$\lim_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{x^6-1}{x^5-1}}=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}}=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x^4+x^3+x^2+x+1)}}=$$
$$=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{6}{5}}$$

3) $\lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{1}{n}\right)+1=1$ che è proprio $\inf$ A ossia la risposta corretta è la (b).

4) Data $f(x)=(x-3)\sqrt[5]{x^2}$ evidentemente è continua per tutti i reali.

$$f'(x)=\sqrt[5]{x^2}+(x-3)\frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}=\frac{5x+2x-6}{5\sqrt[5]{x^3}}=\frac{7x-6}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

ed evidentemente la funzione non è derivabile in $x=0$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{7x-6}{5\sqrt[5]{x^3}}=+\infty;\ \text{ mentre }\lim_{x\to0^+}\frac{7x-6}{5\sqrt[5]{x^3}}=-\infty\text{ che indica una cuspide}$$

5) $e^{\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\pi-3}\Rightarrow\dfrac{1}{x^2}=\log\sqrt{\pi-3}=\dfrac{1}{2}\log(\pi-3)<0$ ossia impossibile da risolvere

La risposta corretta è la (a).

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30.**

6) Per decomporre il polinomio x^4+2x^2-1 , poniamo $t=x^2$. Otteniamo

$t^2+2t-1=0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4}=1+1=2 \Rightarrow t=-1\mp\sqrt{2}=<\begin{matrix}-1-\sqrt{2}\\-1+\sqrt{2}\end{matrix}$ da cui $x^2=-1-\sqrt{2}$ impossibile e

$x^2=-1+\sqrt{2} \Rightarrow x=\mp\sqrt{\sqrt{2}-1}$ ossia il polinomio viene decomposto nel modo seguente

$x^4+2x^2-1=\left(x^2+1+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\left(x+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)>0$ per

$$x<-\sqrt{\sqrt{2}-1} \vee x>\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

7) $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^5+2)^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n^5+2)^n}$ la confronto con la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ dato che $\frac{1}{(n^5+2)^n}<\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e dato che la seconda è la serie geometrica di ragione <1 la serie in oggetto converge.

8) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}: f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}; f''(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}; f'''(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$f(0)=0; f'(0)=1; f''(0)=0; f'''(0)=1$ da cui il polinomio di Mac Laurin cercato è $P_3(x)=x+\frac{x^3}{6}$

9) $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$ per esistere l'inversa deve avere determinante non nullo $\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}=2\neq 0$

$\mathrm{adj}(A)=\begin{pmatrix}2&0\\-3&1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}2&-3\\0&1\end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ come previsto dal quesito effettuiamo la verifica

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0&-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\\0+0&0+\frac{2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

10) $A \Rightarrow -4<x<4$ mentre $B \Rightarrow 0<x<10$ e quindi $A-B=\{x\in\mathbb{R}:\ -4<x<0\}$