TEMA 1

- Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{(x+1)}{e^{\frac{1}{x}}}$$

e tracciare il grafico $|f(x)|$.

- Dire se la tangente alla curva di equazione

$$y = 2^{\frac{1}{x-1}} - 2^{\frac{1}{x^2(x-1)}}$$

nel punto di ascissa $x = -1$, forma con l'asse delle x un angolo α maggiore o minore di $\frac{\pi}{4}$.

- Data la funzione $f(x)$: $(e-1, e+3) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = e - x + \ln\left(\frac{2}{x}\right)$$

scrivere la formula di Taylor di punto iniziale $x_0 = 2e$ e arrestata al 2° ordine.

- Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n\, n!}{n^n}$$

determinare il carattere della serie per ogni $a \in \mathbb{R}_+ - \{e\}$.

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Soluzioni Tema 1

1) $f(x)=\dfrac{(x+1)}{e^{\frac{1}{x}}}$; C. E.: $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{(x+1)}^{\to-\infty}}{\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to1}}=-\infty;\quad \lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to1}\frac{1}{\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to1}}=1=m$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)}{e^{\frac{1}{x}}}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to1}}\times\left(\lim_{x\to-\infty}x+1-xe^{\frac{1}{x}}\right)=1\times\left(\lim_{x\to-\infty}1+\lim_{x\to-\infty}x\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=1-\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=1-\ln e=1-1=0 \text{ e } y=x \text{ è asint. obliquo sx}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{(x+1)}{\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to0^+}}=+\infty \text{ asintoto verticale sx;}\qquad \text{mentre } \lim_{x\to0^+}\frac{(x+1)}{\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to+\infty}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{(x+1)}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to1}}=+\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to1}\frac{1}{\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to1}}=1=m$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)}{e^{\frac{1}{x}}}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to1}}\times\left(\lim_{x\to+\infty}x+1-xe^{\frac{1}{x}}\right)=1\times\left(\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}x\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=1-\ln e=1-1=0 \text{ e } y=x \text{ è asint. obliquo dx}$$

$$f'(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-(x+1)e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{e^{\frac{2}{x}}}=\frac{1+\frac{x+1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}}=\frac{x^2+x+1}{x^2e^{\frac{1}{x}}} \text{ con } Df'=Df$$

$f'(x)\geq0\Rightarrow\ x^2+x+1\geq0\Rightarrow\Delta=1-4<0$ e quindi $f'(x)>0$ nel dominio.

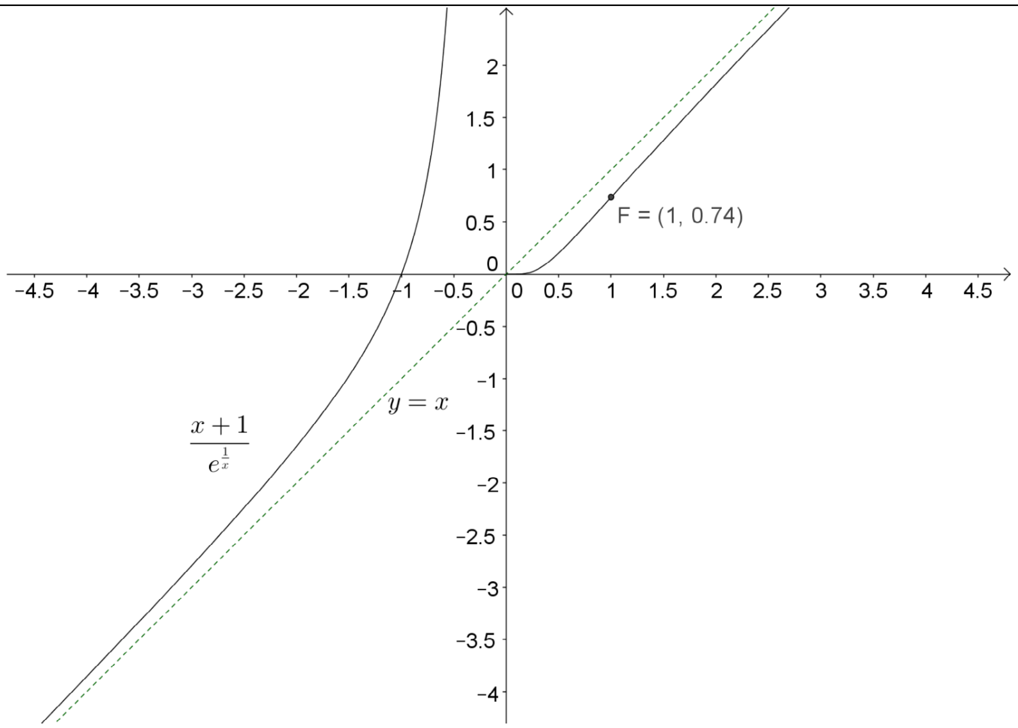
$$\text{inoltre } \lim_{x\to0^+}\frac{\overbrace{x^2+x+1}^{\to1}}{\underbrace{x^2}_{\to0^+}\ \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to+\infty}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{xe^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2e^{\frac{1}{x}}}=0+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{xe^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2e^{\frac{1}{x}}}=\otimes$$

se poniamo $t=\dfrac{1}{x}$, per $x\to0^+\Rightarrow t=+\infty$ e quindi gli ultimi due limiti possono essere riscritti come

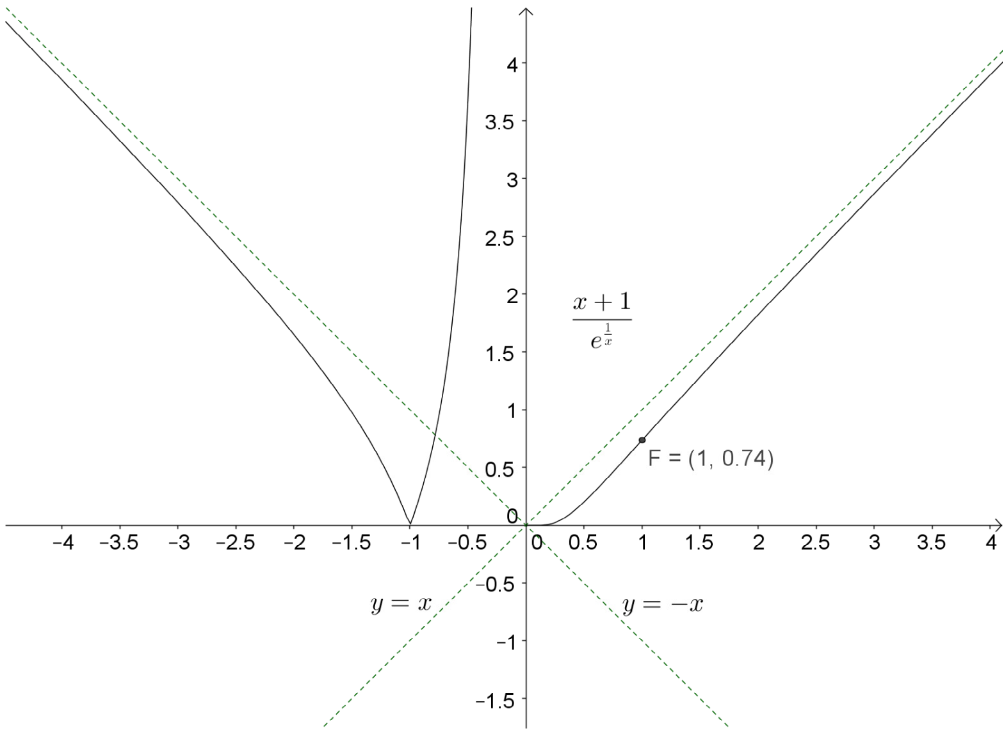
$\otimes=\lim_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}+\lim_{x\to+\infty}\dfrac{t^2}{e^{\,t}}=0$ e quindi la tangente destra in $x=0$ è parallela all'asse x

Da tale tangente destra orizzontale si evince il punto di flesso indicato con *F* in figura, visto che la curva si adagia inferiormente sull'asintoto obliquo destro. Inoltre, dato l'asintoto verticale sinistro in $x=0$ e l'asintoto obliquo sinistro non è necessario procedere allo studio della derivata seconda.

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.



e il valore assoluto della funzione è quindi



2) $y = 2^{\frac{1}{x-1}} - 2^{\frac{1}{x^2(x-1)}}$ basta vedere il coefficiente angolare della retta tangente alla curva (se esiste) nel punto di ascissa $x = -1$ e quindi basta effettuare la derivata prima in -1:

$f'(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\ln 2 \, - 2^{\frac{1}{x^2(x-1)}}\left(-\frac{3x^2-2x}{x^4(x-1)^2}\right)\ln 2$ da cui si ricava

$f'(-1) = 2^{\frac{1}{-1-1}}\left(-\frac{1}{(-1-1)^2}\right)\ln 2 \, - 2^{\frac{1}{1(-1-1)}}\left(-\frac{3+2}{1(-1-1)^2}\right)\ln 2 \, = -2^{-\frac{1}{2}}\frac{\ln 2}{4} + 2^{-\frac{1}{2}}\frac{5\ln 2}{4} =$

$$= -\frac{\ln 2}{4\sqrt{2}} + \frac{5\ln 2}{4\sqrt{2}} = \frac{4\ln 2}{4\sqrt{2}} = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} = 0.49 < 1$$

Poiché il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in $x = -1$ è minore di 1, ne consegue che l'angolo α formato da essa con l'asse delle x e inferiore a $\frac{\pi}{4}$ (dato che $\tan\frac{\pi}{4} = 1$).

3) $f(x) = e - x + \ln\left(\frac{2}{x}\right)$ scrivere la formula di Taylor di punto iniziale $x_0 = 2e$ e arrestata al 2° ordine tenendo conto che l'insieme di partenza di $f(x)$ è $(e-1, e+3)$.

Tenendo conto che il dominio della funzione è ristretto dalla condizione $\frac{2}{x} > 0$ e $x \neq 0$ si ottiene $x > 0 \cap (e-1, e+3) = (e-1, e+3)$. Inoltre il punto iniziale $e - 1 < 2e < e + 3 \Rightarrow -1 < e < 3$

Abbiamo che

$$f(x) = e - x + \ln\left(\frac{2}{x}\right) ; \qquad f(2e) = e - 2e + \ln\frac{2}{2e} = -e + \ln\frac{1}{e} = -e - 1 = -3.72$$

$$f'(x) = -1 + \frac{x}{2}\left(-\frac{2}{x^2}\right) = -1 - \frac{1}{x} ; \qquad f'(2e) = -1 - \frac{1}{2e} = -\frac{2e+1}{2e} = -1.18$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} ; \qquad f''(2e) = \frac{1}{4e^2} = 0.03$$

e quindi la formula di Taylor richiesta è

$$f(x) \simeq -3.72 - 1.18\,(x - 2e) + \frac{0.03(x-2e)^2}{2}$$

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n\, n!}{n^n}$ con $a \in \mathbb{R}_+ - \{e\}$

Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}\,(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{a^n\, n!} = \lim_{n\to+\infty} a \frac{a^n}{a^n}\,(n+1)\frac{n!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} = a \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= a \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e} < 1 \Rightarrow a < e \text{ per essere convergente.}$$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.