TEMA A

1) **[6]** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - |x|}$$

2) **[3]** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

3) **[3]** Scegliere la risposta corretta e giustificarla. Dato l'insieme:

$$A = \{(a-1)^n : n \in \mathbb{N}, a > 1\}$$

stabilire per quali valori di a, l'insieme rappresenta una successione infinitesima:

a) non esiste a b) $a > 1$ c) $1 < a < 2$ d) $a > 2$

4) **[3]** Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1}$$

una volta individuato il campo di esistenza, valutarne la derivabilità nel suo dominio.

5) **[2]** $\log_2 \left|\log_{\frac{1}{3}} 9\right| = ?$

a) 0; b) -1; c) e; d) 1;

6) **[2]** Decomporre il polinomio $2x^3 - 2x^2 + x - 1$ e studiare dove esso è NON NEGATIVO.

7) **[4]** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$

8) **[3]** Data la funzione

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

verificare le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo [-2, 2].

9) **[3]** Trovare le soluzioni del sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - y = k \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

10) **[1]** Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 10\}$ si individui l'insieme $A \cap B$.

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' <u>obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30</u>.**

Soluzioni Tema C

1) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-|x|}$; C. E. $1-|x|\neq 0 \Rightarrow |x|\neq 1 \Rightarrow x\in\mathbb{R}/\{\mp 1\}$, inoltre $f(-x)=\dfrac{1+x^2}{1-|-x|}=\dfrac{1+x^2}{1-|x|}=$

$=f(x)$ funzione pari, la studio in $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$ in cui vale $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x}$

$f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 1^{\mp}}\dfrac{1+x^2}{1-x}=\pm\infty$. Asintoto verticale dx e sx

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x-x^2}=-1=m$

$q=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x}+x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2+x-x^2}{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{1-x}=-1$; ossia $y=-x-1$ asint. obliquo dx

$f'(x)=\dfrac{2x(1-x)+(1+x^2)}{(1-x)^2}=\dfrac{2x-2x^2+1+x^2}{(1-x)^2}=\dfrac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}$ per $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

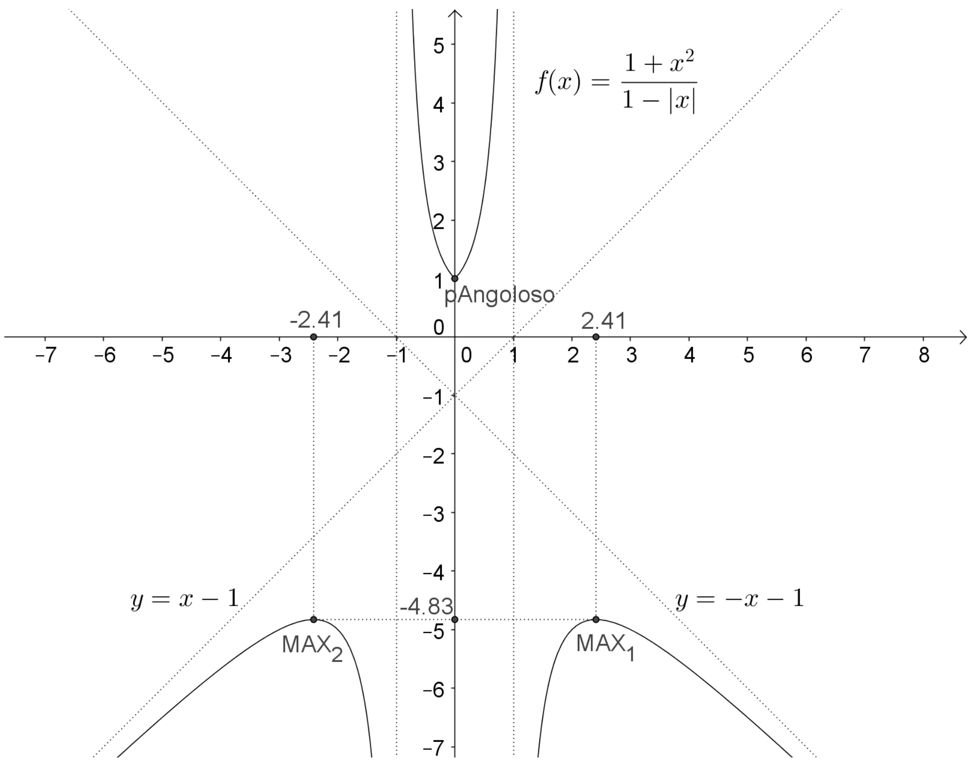
$f'(x)\geq 0$ se $-x^2+2x+1\geq 0 \Rightarrow x^2-2x-1\leq 0; \dfrac{\Delta}{4}=1+1=2; x=1\mp\sqrt{2}=<\begin{matrix}1-\sqrt{2}\\1+\sqrt{2}\end{matrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow 1-\sqrt{2}\leq x\leq 1+\sqrt{2}\ \cap x>0\ \cap x\neq 1$

$$\begin{array}{lcccccccccc}
 & 1-\sqrt{2} & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & 1+\sqrt{2} & \cdots\cdots \\
f'(x) & & & \vdots & + & \odot & + & \vdots & - \\
f(x) & & \textbf{Non acc} & \vdots & \nearrow & \odot & \nearrow & \vdots & \searrow \\
 & & & & & & & \text{Max} &
\end{array}$$

Max $\left(1+\sqrt{2},-\dfrac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\equiv(2.41,-4.83)$

Analizziamo $f'(x)$in un intorno destro di $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^2+2x+1}{(1-x^2)}=1$



Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' __obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30__.**

2) $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = \ln(e^2) = 2$

3) $(a-1)^n$ è infinitesima solo se $|a-1|<1,$ ma poiché $a>1$ basta imporre $a-1<1 \Rightarrow a<2$ da cui la risposta corretta è la (c).

4) Data $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x|+1}$ evidentemente è continua per tutti i reali $x \in \mathbb{R}$. La $f(x)$ si può riscrivere come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} \text{ per } x \geq 0 \\ \dfrac{x^2-1}{-x+1} \text{ per } x<0 \end{cases} \text{ da cui } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(x+1)-(x^2-1)}{(x+1)^2} \text{ per } x>0 \\ \dfrac{2x(-x+1)+(x^2-1)}{(-x+1)^2} \text{ per } x<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} \text{ per } x>0 \\ \dfrac{-x^2+2x-1}{(-x+1)^2} \text{ per } x<0 \end{cases} \text{ in cui l'unico problema può venire da } x=0$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{-x^2+2x-1}{(-x+1)^2} = -1; \text{ mentre } \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} = 1 \text{ che indica un punto angoloso.}$$

5) $\log_2\left|\log_{\frac{1}{3}} 9\right| = \log_2|-\log_3 9| = \log_2|\log_3 9| = \log_2|\log_3 3^2| = \log_2|2| = \log_2 2 = 1$ da cui la risposta corretta è la (d).

6) Per decomporre il polinomio $2x^3-2x^2+x-1$, si vede subito dai coefficienti che $x=1$ è una radice. Tramite Ruffini o la divisione dei polinomi $2x^3-2x^2+x-1=(x-1)(2x^2+1)\geq 0$ non è ulteriormente riducibile e quindi basta porre $x-1\geq 0$ da cui $x\geq 1$.

7) $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n+3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n}{5^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ e dato che entrambe sono serie geometriche di ragione positiva e minore di uno, la serie iniziale è convergente.

8) $f(x) = \ln(x^2+1)$ si devono verificare le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo [-2, 2]. Poiché $x^2+1>0\ \forall x \in \mathbb{R}$, è sicuramente continua nell'intervallo [-2, 2]. La sua derivata $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ è continua nell'intervallo aperto $(-2,2)$ inoltre $f(-2) = \ln((-2)^2+1) = \ln 5 = f(2)$ ossia assume valori eguali agli estremi dell'intervallo [-2, 2]. Pertanto le ipotesi del teorema di Rolle sono verificate.

9) $\begin{cases} x-y= \ k \\ x+ky=1 \end{cases}$ analizziamo il rango al variare di k: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k+1 \neq 0$ se $k \neq -1$.

Sotto queste ipotesi il sistema è a pieno rango e ammette soluzioni:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix}}{k+1} = \frac{k^2+1}{k+1}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{k+1} = \frac{1-k}{k+1}; \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Nel caso particolare in cui $k=-1$ il sistema diventa $\begin{cases} x-y=-1 \\ x-y= \ 1 \end{cases}$ ed è evidentemente incompatibile.

10) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2>4\} = \{x \in \mathbb{R}: x<-2\ \vee x>2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 0<x<10\}$ allora

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R}: 2<x<10\}$$