TEMA 1

- Studiare la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{\ln[(x-1)^2]}$$

- Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2}\,\sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$$

giustificando il risultato.

- Data la funzione $f(x) = x - 1 - \ln(x)$ determinare il polinomio di Taylor di punto iniziale $x_0 = 1$ arrestato al 3° ordine.

- Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$$

determinare il carattere della serie.

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Soluzioni Tema 1

1) $f(x) = -\dfrac{1}{\ln[(x-1)^2]}$; $\text{C.E.}: x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1; \ln[(x-1)^2] \neq 0 \Rightarrow (x-1)^2 \neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x^2 - 2x + 1 \neq 1 \Rightarrow x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow x(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,2\}$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} -\dfrac{1}{\underbrace{\ln[(x-1)^2]}_{\to+\infty}} = 0^-$; $\lim\limits_{x\to 0^\mp} -\dfrac{1}{\underbrace{\ln[(x-1)^2]}_{\to 0^\pm}} = \mp\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^\mp} -\dfrac{1}{\underbrace{\ln[(x-1)^2]}_{\to-\infty}} = 0^+$

$\lim\limits_{x\to 2^\mp} -\dfrac{1}{\underbrace{\ln[(x-1)^2]}_{\to 0^\mp}} = \pm\infty$; e quindi $y = 0$ è as. oriz. dx e sx mentre $x = 1$ e $x = 2$ sono as. verticali.

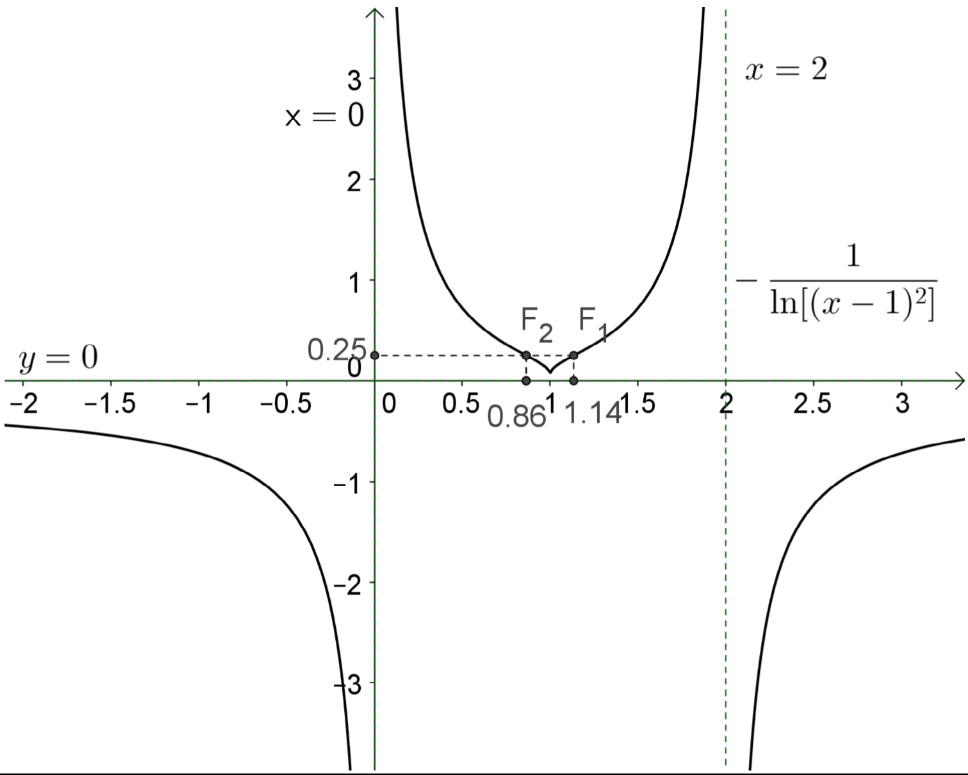
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{(x-1)^2}2(x-1)}{\ln^2[(x-1)^2]} = \frac{2}{(x-1)\ln^2[(x-1)^2]} \text{ con } Df' = Df$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow\ x \geq 1 \Rightarrow$ e quindi $f(x)$ è crescente in $(1,2) \cup (2,+\infty)$, descrescente in $(-\infty,0) \cup (0,1)$.

l'unico punto dubbio rimane $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^\mp} \dfrac{2}{\underbrace{(x-1)}_{\to 0^\mp}\underbrace{\ln^2[(x-1)^2]}_{\to+\infty}} = 2\lim\limits_{x\to 1^\mp} \dfrac{\frac{2}{x-1}}{\ln^2[(x-1)^2]} \overset{H}{\cong}$

$$\overset{H}{\cong} 2\lim_{x\to 1^\mp} \frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{2\ln[(x-1)^2]\frac{1}{(x-1)^2}2(x-1)} = -\lim_{x\to 1^\mp} \frac{1}{2\ln[(x-1)^2](x-1)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1^\mp} \frac{\frac{1}{x-1}}{\ln[(x-1)^2]} \overset{H}{\cong} -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1^\mp} \frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{1}{(x-1)^2}2(x-1)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^\mp} \frac{1}{2\underbrace{(x-1)}_{\to 0^\mp}} = \mp\infty$$ ossia in $x = 1$ si ha una cuspide rivolta verso il basso. Dato gli asintoti e la cuspide non è necessario procedere allo studio della derivata seconda.



E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

2) $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2} \sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right) = 0$

poichè si tratta del prodotto di una funzione limitata $\sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$ per una infinitesima $\sqrt[3]{x^2}$ in $x \to 0$

3) $f(x) = x - 1 - \ln(x)$ scrivere la formula di Taylor di punto iniziale $x_0 = 1$ arrestata al 3° ordine

$f(x) = x - 1 - \ln x$; $\qquad f(1) = 0$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$; $\qquad f'(1) = 0$

$f''(x) = \frac{1}{x^2}$; $\qquad f''(1) = 1$

$f'''(x) = -\frac{2}{x^3}$; $\qquad f'''(1) = -2$

e quindi la formula di Taylor richiesta è

$$f(x) \simeq \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3}$$

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$

Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{2^n\, n!} = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{2^n}{2^n}\,(n+1)\frac{n!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} = 2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= 2\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \text{è convergente.}$$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.