TEMA A

1) **[6]** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln(x^2 - 1)}$$

(senza effettuare la derivata seconda)

2) **[4]** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 5} (2x - 9)^{\frac{1}{x-5}}$$

3) **[3]** Scegliere la risposta corretta e giustificarla. Dato l'insieme:

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

l'insieme:

a) è vuoto   b) non è limitato   c) ammette minimo   d) ammette massimo

4) **[4]** Data la funzione

$$f(x) = e^{-|x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

l'insieme $\{x \in \mathbb{R}: f \text{ è derivabile in } x\}$ coincide con

a) $\mathbb{R}$;   b)$\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$;   c) $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$;   d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

5) **[1]** $\log_2 \sqrt{32} = ?$

a) e;   b)$\frac{5}{2}$;   c) 2;   d) 0;

6) **[2]** Decomporre il polinomio $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ e studiare dove esso è NEGATIVO.

7) **[4]** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^{n+1}$$

8) **[3]** Data la funzione

$$f(x) = (7x - 1)^3, \forall x \in \mathbb{R}$$

trovare il polinomio di Mac Laurin di ordine 1.

9) **[2]** Individuare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'invertibilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

10) **[1]** Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| > 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 1 < x < 6\}$ si individui l'insieme $A \cap B$.

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' <u>obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30</u>.**

Soluzioni Tema A

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{\ln(x^2-1)}$; C. E. $x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow x<-1 \vee x>1$; $\ln(x^2-1)\neq 0 \Rightarrow x^2-1\neq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x\neq \mp\sqrt{2}$; da cui $x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ data la simmetria del dominio

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{\ln[(-x)^2-1]}=\dfrac{x^2-1}{\ln(x^2-1)}=f(x)$ funzione pari, la studio in $x\in\left(1,\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

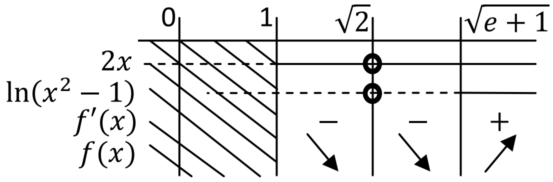
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{x^2-1}^{\to 0^+}}{\underbrace{\ln(x^2-1)}_{\to -\infty}}=0^-;\quad \lim_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^{\mp}}\frac{\overbrace{x^2-1}^{\to 1}}{\underbrace{\ln(x^2-1)}_{\to 0^{\mp}}}=\mp\infty \text{ asintoto verticale dx e sx}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{\ln(x^2-1)}=+\infty \text{ per confronto tra infiniti di ordine diverso}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x\ln(x^2-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{\ln(x^2-1)}=+\infty \text{ sempre per confronto tra infiniti di ordine diverso}$$

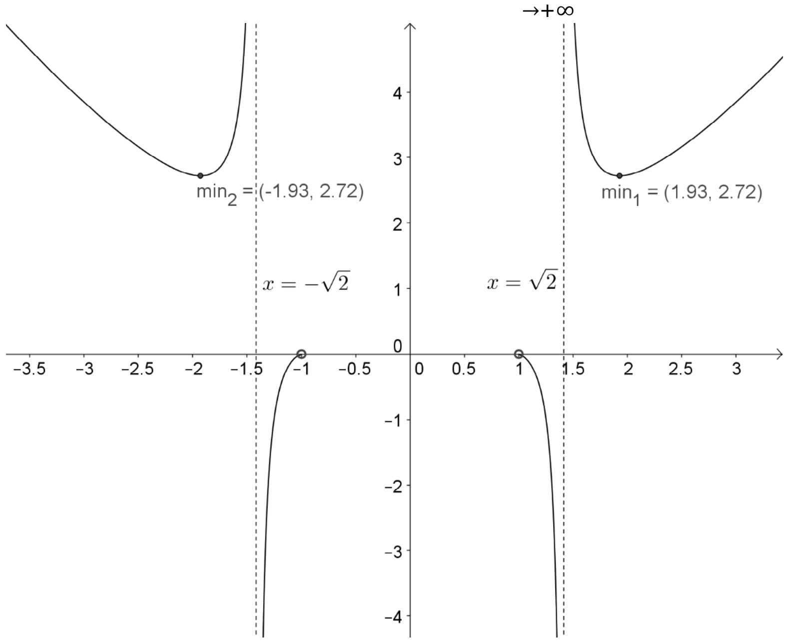
$$f'(x)=\frac{2x\ln(x^2-1)+(x^2-1)\frac{2x}{x^2-1}}{\ln^2(x^2-1)}=\frac{2x\ln(x^2-1)-2x}{\ln^2(x^2-1)}=\frac{2x\left[\ln(x^2-1)-1\right]}{\ln^2(x^2-1)} \text{ con } Df'=Df$$

$f'(x)\geq 0$: $2x\geq 0\Rightarrow x\geq 0$; inoltre $\ln(x^2-1)\geq 1\Rightarrow x^2-1\geq e\Rightarrow x^2\geq e+1\Rightarrow$
$\Rightarrow x\leq-\sqrt{e+1}\vee x\geq\sqrt{e+1}$ da cui otteniamo



$\min\left(\sqrt{e+1},e\right)\equiv(1.93, 2.72)$

Analizziamo $f'(x)$ in un intorno destro di $x=1$: $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{2x}^{\to 1}\overbrace{\left[\ln(x^2-1)-1\right]}^{\to -\infty}}{\underbrace{\ln^2(x^2-1)}_{\to +\infty}}=0$



2) $\lim_{x\to 5}\left(\underbrace{2x-9}_{\to 1}\right)^{\overbrace{\frac{1}{x-5}}^{\to\mp\infty}} = \lim_{x\to 5}\left[\left(1+\left(\underbrace{2x-10}_{\to 0^{\mp}}\right)\right)^{\frac{1}{2x-10}}\right]^{\frac{2x-10}{x-5}} = \lim_{x\to 5}\left[\left(1+\left(\underbrace{2x-10}_{\to 0^{\mp}}\right)\right)^{\frac{1}{2x-10}}\right]^{2} = e^2$

3) $\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{\mathrm{n}}$ è decrescente e convergente al valore 1 e per $x = 1$ ammette massimo ossia 2, da cui la risposta corretta è la (d).

4) Data $f(x) = e^{-|x|^2}$

$f'(x) = e^{-|x|^2} = e^{-|x|^2}\left(-2|x|\frac{x}{|x|}\right) = -2xe^{-|x|^2}$ e poiché $\lim_{x\to 0^{\mp}} -2xe^{-|x|^2} = 0$ risposta corretta è la (a) in alternativa basta notare che $e^{-|x|^2} = e^{-x^2}$ evidentemente continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

5) $\log_2\sqrt{32} = \frac{1}{2}\log_2 2^5 = \frac{5}{2}\log_2 2 = \frac{5}{2}$ da cui la rispotta corretta è la (b).

6) Per decomporre il polinomio $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, si vede subito dai coefficienti che $x = 1$ è una radice. Tramite Ruffini o la divisione dei polinomi $2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2 - x + 1) \geq 0$ non è ulteriormente riducibile e quindi basta porre $x - 1 < 0$ da cui $x < 1$.

7) $\sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty}(4x)^n$ si tratta di una serie geometrica convergente se $|4x| < 1$ e quindi $-1 < 4x < 1$ ossia $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$

8) $f(x) = (7x-1)^3, f'(x) = 21(7x-1)^2$ i valori assunti in $x = 0$ sono $f(0) = -1, f'(0) = 21$ da cui

$$P_1(x) = -1 + 21x$$

9) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & k\end{pmatrix}$ deve avere determinante non nullo: $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & k\end{vmatrix} = k + 1 \neq 0$ se $k \neq -1$.

10) $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| > 4\} = \{x \in \mathbb{R}: x < -4 \ \vee x > 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 1 < x < 6\}$ allora

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R}: 4 < x < 6\}$$

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30.**