TEMA 1

- Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{3-x}$$

- Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \cos|x^2-1|$$

nel punto di ascissa $x_0 = -1$.

- Determinare, per ogni valore del parametro a, le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} (a-a^2+2)x + (3a-2)y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ a(a-1)x - ay = 0 \end{cases}$$

- Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-n} \text{ con } x \in \mathbb{R}_+$$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Soluzioni Tema 1

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{3-x}$; C. E.: $x^2-4\geq 0 \Rightarrow x^2\geq 4 \Rightarrow x\leq -2 \ \vee x\geq 2$; inoltre $3-x\neq 0 \Rightarrow x\neq 3$ da cui

$\Rightarrow\ x\in(-\infty,-2]\cup[2,3)\cup(3,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{3-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{-x\left(\frac{3}{x}+1\right)}=1$ asintoto orizzontale sx; $f(-2)=f(2)=0$

$\lim\limits_{x\to 3^{\mp}}\dfrac{\overbrace{\sqrt{x^2-4}}^{\to\sqrt{5}}}{\underbrace{3-x}_{\to 0^{\pm}}}=\pm\infty$ asintoto verticale;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{3-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x\left(\frac{3}{x}-1\right)}=-1$ asintoto orizzontale dx

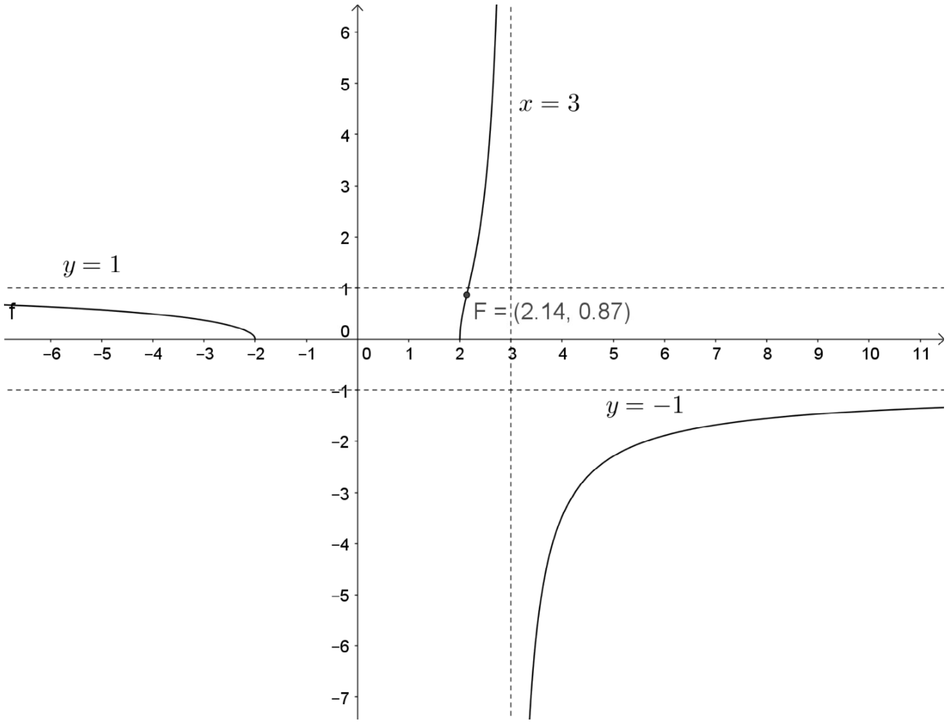
$f'(x)=\dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}(3-x)+\sqrt{x^2-4}}{(3-x)^2}=\dfrac{3x-x^2+x^2-4}{\sqrt{x^2-4}(3-x)^2}=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^2-4}(3-x)^2}$ con $Df'=Df\setminus\{\mp 2\}$

$f'(x)\geq 0 \Rightarrow 3x-4\geq 0 \Rightarrow x\geq\frac{4}{3}\notin Df(x)$ e quindi $f(x)$ è cresc. in $(2,3)\cup(3,+\infty)$, decr. in $(-\infty,-2)$.

Gli unici punto dubbi rimangono $x=-2^-$ e $x=2^+$: $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{\overbrace{3x-4}^{\to-10}}{\underbrace{\sqrt{x^2-4}}_{\to 0^+}\underbrace{(3-x)^2}_{\to 25}}=-\infty$ tangente verticale

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\overbrace{3x-4}^{\to 2}}{\underbrace{\sqrt{x^2-4}}_{\to 0^+}\underbrace{(3-x)^2}_{\to 1}}=+\infty$ tangente verticale

Dato i risultati precedenti non è necessario procedere allo studio della derivata seconda.



E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

2) $f(x) = \cos|x^2 - 1|$, l'equazione della retta tangente in $x_0 = -1$ è $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f(-1) = \cos|1 - 1| = 1$; poiché $|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ per } x \le -1 \lor x \ge 1 \\ 1 - x^2 \text{ per } \quad -1 < x < 1 \end{cases}$ e quindi

$f(x) = \begin{cases} \cos(x^2 - 1) \text{ per } x \le -1 \lor x \ge 1 \\ \cos(1 - x^2) \text{ per } \quad -1 < x < 1 \end{cases}$ e poiché $\cos(-x) = \cos(x)$ è una funzione pari

$f(x) = \begin{cases} \cos(x^2 - 1) \text{ per } x \le -1 \lor x \ge 1 \\ \cos(x^2 - 1) \text{ per } \quad -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2x\sin(x^2 - 1) \text{ per } x \le -1 \lor x \ge 1 \\ -2x\sin(x^2 - 1) \text{ per } \quad -1 < x < 1 \end{cases}$ da cui

$\lim_{x \to -1^-} -2x\sin(x^2 - 1) = \lim_{x \to -1^+} -2x\sin(x^2 - 1) = 0 = f'(-1)$ e quindi l'equazionedella retta tangente alla curva sarà $y = 1$

3) $\begin{cases} (a - a^2 + 2)x + (3a - 2)y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ a(a - 1)x - ay = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a - a^2 + 2 & 3a - 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ a(a - 1) & -a & 0 \end{vmatrix} = a(3a - 2)(a - 1) - 2a + 2a(a - 1) + a(a - a^2 + 2) =$$

$= a(3a^2 - 3a - 2a + 2) - 2a + 2a^2 - 2a + a^2 - a^3 + 2a =$

$= 3a^3 - 3a^2 - 2a^2 + 2a - 2a + 2a^2 + a^2 - a^3 = 2a^3 - 2a^2 = 2a^2(a - 1) = 0$ se $a = 0 \lor a = 1$

Se $a \neq 0$ e $a \neq 1$ l'unica soluzione è $x = y = z = 0$.

Caso $a = 0$) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rango $= 1$, soluzione $2x - 2y + 2z = 0 \Rightarrow x = y - z$

Caso $a = 1$) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow$ rango $= 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -2z \\ x - y = -z \end{cases}$ da cui si ha

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2z & 1 \\ -z & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3z}{-3} = 3;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = 0$$

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-n}$ con $x \in \mathbb{R}_+$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x + 1}{x}\right)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{x + 1}\right)^{n}$ è una serie geometrica e converge per $\left|\frac{x}{x + 1}\right| < 1$

$\frac{x}{x + 1} < 1 \Rightarrow \frac{x}{x + 1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x - x - 1}{x + 1} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{x + 1} < 0$ vero sempre

$\frac{x}{x + 1} > -1 \Rightarrow \frac{x}{x + 1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{x + x + 1}{x + 1} > 0 \Rightarrow \frac{2x + 1}{x + 1} > 0$ vero sempre

Ossia la serie converge sempre.

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.