# TEMA A

1) **[6]** Studiare la funzione

$$f(x) = x\ln(x^2)$$

2) **[4]** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\frac{2}{3}}\ln(1-\tan x)$$

3) **[3]** Scegliere la risposta corretta e giustificarla. Dato l'insieme:

$$A = \left\{\frac{3n-1}{2n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$$

il massimo di $A$ è dato da:

a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{2} - \varepsilon, \varepsilon > 0$ e piccolo d) non esiste

4) **[4]** Data la funzione

$$f(x) = \ln^2(1+|x|)$$

a) è derivabile in $x = 0$; b)non è derivabile in $x = 0$; c) è dispari; d) non è definita in $x = 0$.

5) **[1]** La soluzione della disequazione $2^{x+1} < 16$ è:

a) $x < 3$; b) $0 < x < 3$; c) $x > 3$; d) $x < \ln(16) - 1$;

6) **[2]** Decomporre il polinomio biquadratico $x^4 + 3x^2 + 2$ e studiare dove esso è POSITIVO.

7) **[4]** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\frac{n}{2^n}$$

8) **[3]** Trovare l'equazione della retta tangente alla curva

$$f(x) = 2^{\sqrt{x}}$$

nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

9) **[2]** Dato il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + ky = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}$$

trovare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ammette autosoluzioni.

10) **[1]** Dati gli insiemi $A = \{\text{divisore di } 12\}$ e $B = \{\text{multiplo di } 3\}$ si individui l'insieme $A \cap B$.



Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' <u>obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30</u>.**

**Soluzioni Tema A**

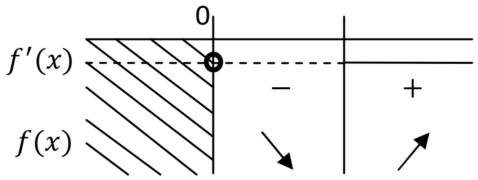
1) $f(x) = x\ln(x^2)$ ; C.E. $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; data la simmetria del dominio studiamo eventuali simmetrie: $f(-x) = -x\ln x^2 = -f(x)$ funzione dispari; la studio quindi in $(0,+\infty)$ e ribalto rispetto l'origine.

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0^+} \underbrace{\ln x^2}_{\to -\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -2x = 0^-; \text{inoltre } f(1) = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x^2 = +\infty\ ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln x^2 = +\infty \text{ No as. orizzontale, no as. obliquo}$$

$$f'(x) = \ln x^2 + \frac{2x}{x^2}x = \ln x^2 + 2 \text{ con } Df' = Df$$

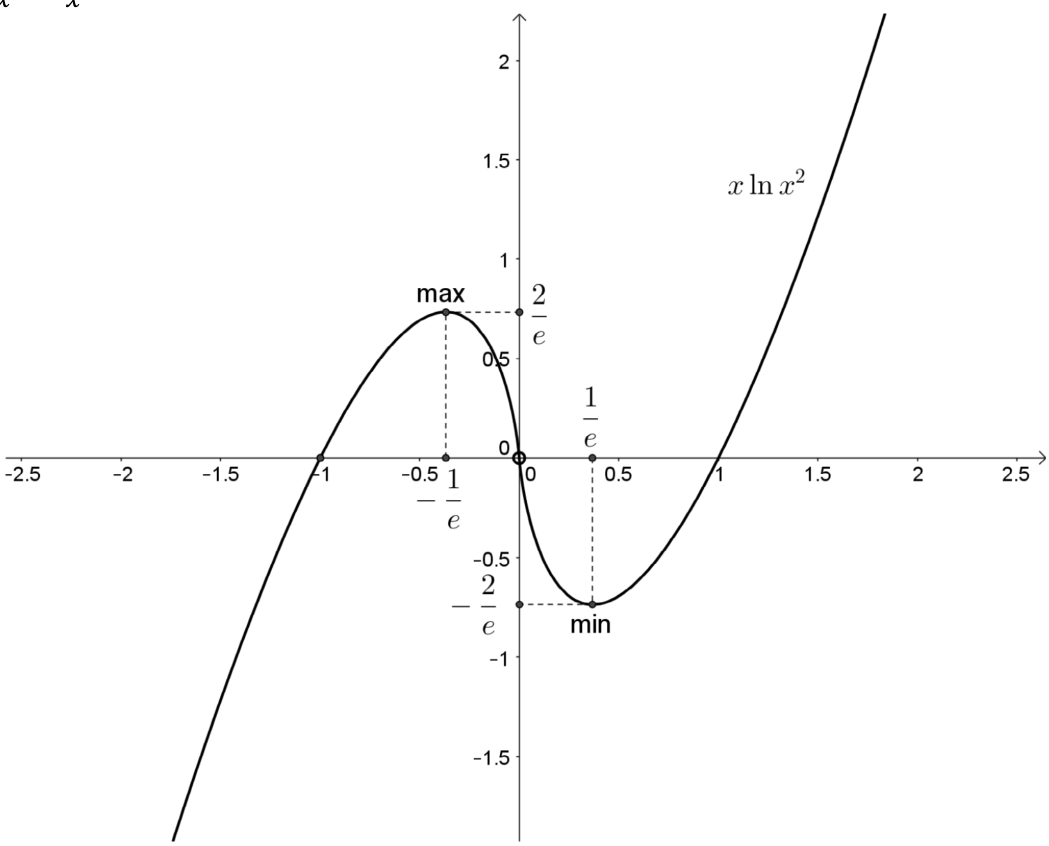
$$f'(x) \ge 0\text{: } \ln x^2 + 2 \ge 0 \Rightarrow \ln x^2 \ge -2 \Rightarrow x^2 \ge e^{-2} \Rightarrow x \le -\frac{1}{e} \vee x \ge \frac{1}{e} \text{ da cui otteniamo}$$




$$\min\left(\frac{1}{e}, -\frac{2}{e}\right) \equiv (0.36, -0.73)$$

Analizziamo $f'(x)$ in un intorno destro di $x = 0$ : $\lim_{x\to 0^+} \ln x^2 + 2 = -\infty$ tangente destra verticale

$$f''(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} > 0 \text{ per } x > 0 \text{ la curva rivolge la concavità verso l'alto in } (0,+\infty)$$






Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' <u>obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30</u>.**

2) $\lim_{x\to0^+} \underbrace{x^{-\frac{2}{3}}}_{\to+\infty} \underbrace{\ln(1-\tan x)}_{\to0^-} = \lim_{x\to0^+} \ln(1-\tan x)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x\to0^+} \ln\left[\left(1+(\tan x)\right)^{\frac{1}{-\tan x}}\right]^{\frac{-\tan x}{\sqrt[3]{x^2}}} =$

$$= \lim_{x\to0^+} \ln\left[\underbrace{\left(1+(\tan x)\right)^{\frac{1}{-\tan x}}}_{e}\right]^{-\frac{\overbrace{\tan x}^{\to1}}{x}\overbrace{\sqrt[3]{x}}^{\to0^+}} = \ln e^0 = \ln 1 = 0$$

3) $\dfrac{3n-1}{2n} = \dfrac{2n+n-1}{2n} = 1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n} = \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2n} \xrightarrow{n\to+\infty} \dfrac{3}{2}$

poiché $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2(\mathrm{n}+1)} > \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2\mathrm{n}} \Rightarrow \dfrac{1}{2\mathrm{n}+2} < \dfrac{1}{2\mathrm{n}} \Rightarrow 2\mathrm{n} < 2n+2 \Rightarrow 0 < 2 \Rightarrow$ la successione è crescente da cui la risposta corretta è la (d).

4) Data $f(x) = \ln^2(1+|x|)$ poiché C. E. $x\in\mathbb{R}$ esclude la risposta (d), inoltre $f(-x) = \ln^2(1+|x|) = f(x)$ mostra che si tratta di una funzione pari escludendo la risposta (c).

La risposta corretta deve essere la (a)o la (b): $f'(x) = \dfrac{2\ln(1+|x|)}{1+|x|}\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{2\ln(1+x)}{1+x} & \text{per } x>0 \\ -\dfrac{2\ln(1-x)}{1-x} & \text{per } x<0 \end{cases}$

e poiché $\lim_{x\to0^+} \dfrac{2\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{x\to0^-} -\dfrac{2\ln(1-x)}{1-x} = 0$ ossia la risposta corretta è la (a).

in alternativa basta notare che $e^{-|x|^2} = e^{-x^2}$ evidentemente continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

5) $2^{x+1} < 16 \Rightarrow 2^{x+1} < 2^4 \Rightarrow x+1 < 4 \Rightarrow x < 3$ da cui la rispotta corretta è la (a).

6) Per decomporre il polinomio $x^4+3x^2+2$ poniamo $t=x^2$, si ha $t^2+3t+2$.

$$\Delta = 9-8 = 1 \Rightarrow t = \frac{-3\mp1}{2} =< \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}$$

Come si vede le radici sono entrambe negative e quindi $x^4+3x^2+2 = (x^2+1)(x^2+2) > 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

7) $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\dfrac{n}{2^n}$ Si vede subito che il termine generale è infinitesimo. Lo confronto con la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n}$ convergente in quanto $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)}{2^{n+1}}\dfrac{2^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} < 1$:

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\frac{n}{2^n}}{\frac{n}{2^n}} = 1$ ossia le due serie hanno lo stesso comportamento e la serie proposta converge.

8) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ ; in $x_0 = 1$ l'equazione della retta tangente sarà $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ma $f(1) = 2; f'(x) = \dfrac{2^{\sqrt{x}}\ln 2}{2\sqrt{x}}$ da cui $f'(1) = \dfrac{2\ln 2}{2} = \ln 2$ e quindi

$$y = \ln 2\,(x-1)+2$$

9) $\begin{cases} x+ky=0 \\ kx+y=0 \end{cases}$ ammette autosoluzioni se il rango non è massimo, ossia: $\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1-k^2 = 0$ ossia $k=\pm1$.

10) $A = \{\text{divisore di } 12\} = \{1,2,3,4,6,12\}$ e $B = \{\text{multiplo di } 3\} = \{3,6,9,12,15,\dots\}$ cui segue che $A\cap B = \{3,6,12\}$



Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30**.