TEMA 1

- Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$$

- Date le funzioni

$$f(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 4 - e^{k-x}$$

trovare il valore di $k \in \mathbb{R}$ affinché le due curve siano tangenti

- Data la funzione $f\colon [-2, 3-e] \to \mathbb{R}$ con legge

$$f(x) = \log^2(1-x)$$

scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine nel punto di ascissa $x_0 = 1 - e$

- Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{\sqrt[3]{n}}$$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Soluzioni Tema 1

1)$f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}$; C. E.: $x\in\mathbb{R}$, funzione che non ha simmetrie rispetto l'origine

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2-x^3}=+\infty;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2-x^3}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}=-1=m$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2-x^3}+x=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3-x^2}-x=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2}=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{\sqrt[3]{x^6-2x^5+x^4}+\sqrt[3]{x^6-x^5}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^6-2x^5+x^4}+\sqrt[3]{x^6-x^5}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}\text{ e quindi } y=-x+\frac{1}{3}\text{ è asintoto obliquo sx}$$

$$x^2-x^3=0\Rightarrow x^2(1-x)\Rightarrow f(0)=f(1)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-x^3}=-\infty;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2-x^3}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}=-1=m$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-x^3}+x=-\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-x^2}-x=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{\sqrt[3]{x^6-2x^5+x^4}+\sqrt[3]{x^6-x^5}+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^6-2x^5+x^4}+\sqrt[3]{x^6-x^5}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}\text{ e quindi } y=-x+\frac{1}{3}\text{ è asintoto obliquo dx e sx}$$

$$f'(x)=\frac{2x-3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}}\geq 0\text{ con } Df'=Df\setminus\{0,1\}$$

$$\lim_{x\to0^\pm}\frac{2x-3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}}=\lim_{x\to0^\pm}\frac{\overbrace{2-3x}^{>0}}{3\sqrt[3]{\underbrace{x}_{\to0^\pm}\underbrace{(1-x)}_{>0}}}=\pm\infty\text{ ossia cuspide}$$

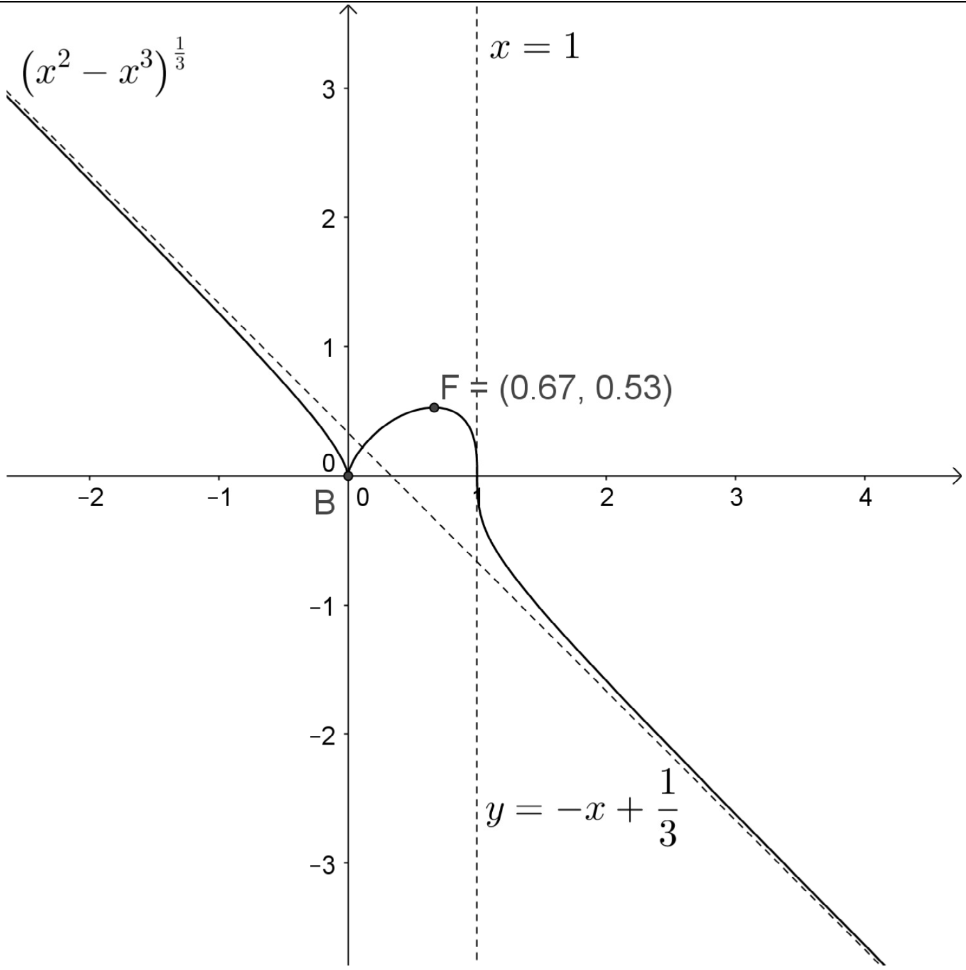
$$\lim_{x\to1^\pm}\frac{\overbrace{2x-3x^2}^{<0}}{3\underbrace{\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}}_{\to0^+}}=-\infty\text{ flesso a tangente verticale}$$

$$f'(x)\geq0\text{ per } 2x-3x^2\geq0\Rightarrow 3x^2-2x\leq0\Rightarrow x(3x-2)\geq0\Rightarrow 0<x\leq\frac{2}{3}\text{ con massimo in}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}-\frac{8}{27}}=\sqrt[3]{\frac{12-8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}=0.53$$

Dato i risultati precedenti non è necessario procedere allo studio della derivata seconda.

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.



2) Affinché le due curve $f(x) = e^x$ e $g(x) = 4 - e^{k-x}$ siano tangenti, è necessario avere due condizioni intersezione fra di esse, e tangenza ossia nel punto di intersezione derivata prima eguale.

Intersezione) $e^x = 4 - e^{k-x} \Rightarrow e^x = 4 - \frac{e^k}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = 4e^x - e^k \Rightarrow (e^x)^2 - 4e^x + e^k = 0$

poniamo $t = e^x$: $t^2 - 4t + e^k = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 4 - e^k = 0$, imporre il $\frac{\Delta}{4} = 0$ equivale a trovare un'unico punto di intersezione valido per la tangenza, dato che le due curve sono strettamente crescenti.

Da questa condizione si deduce $e^k = 4 \Rightarrow k = \log 4$

Tangenza) $f'(x) = e^x; g'(x) = e^{k-x}$ imponendo $k = \log 4$ ossia

$e^x = e^{\log 4 - x} \Rightarrow e^x = \frac{e^{\log 4}}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2 = 4 \Rightarrow e^x = 2$ (dovendo scartare la soluzione negativa) e quindi $x = \log 2$ come verifica basta tornare alla condizione sulla intersezione e sostituire x e k trovati

$e^x = 4 - e^{k-x} \Rightarrow e^{\log 2} = 4 - e^{\log 4 - \log 2} \Rightarrow 2 = 4 - e^{\log 2} \Rightarrow 2 = 4 - 2 \Rightarrow 2 = 2$ c.v.d.

3) $f(x) = \log^2(1-x)$ è definita per ogni $x < 1$, l'intervallo $[-2, 3-e]$ è contenuto in tale dominio così come il punto $x_0 = 1 - e$

$$f'(x) = -2\frac{\log(1-x)}{1-x}; f''(x) = -2\frac{-\frac{1}{1-x}(1-x) + \log(1-x)}{(1-x)^2} = 2\frac{1-\log(1-x)}{(1-x)^2}$$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

$f(1-e) = \log^2(1-1+e) = \log^2 e = 1$

$f'(1-e) = -2\frac{\log(1-1+e)}{1-1+e} = -\frac{2}{e}; f''(1-e) = 2\frac{1-\log(1-1+e)}{(1-1+e)^2} = 2\frac{(1-1)}{e^2} = 0$

da cui si ottiene il polinomio di Taylor del secondo ordine:

$P_2(x) = 1 - \frac{2(x-1+e)}{e}$

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{\sqrt[3]{n}}$

$\frac{\log n}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \forall n > 2$ e poiché la seconda è la serie armonica generalizzata con $\alpha < 1$ *e quindi la serie* data è divergente.