TEMA A

1) **[6]** Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{x^3}$$

2) **[4]** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

3) **[3]** Scegliere la risposta corretta e giustificarla. Dato l'insieme:

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

il massimo di A è dato da:

a) 1 b) 2 c) 0 d) non esiste

4) **[4]** Data la funzione

$$f(x) = \ln(2 + |x|)$$

a) è dispari; b) non è definita in $x = 0$; c) è derivabile in $x = 0$; d) non è derivabile in $x = 0$;.

5) **[1]** Posto $x = \log_3 e$, il numero $\log_9 e^{\frac{1}{x}}$ vale:

a) -2; b) $\frac{1}{2}$; c) e; d) 2;

6) **[2]** Decomporre il polinomio cubico $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ e studiare dove esso è POSITIVO.

7) **[4]** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

8) **[3]** Scrivere il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della funzione

$$f(x) = \cos x^2$$

9) **[2]** Dato il sistema lineare parametrico

$$\begin{cases} ax + by = 2 \\ ax - by = 1 \end{cases}$$

determinare i valori dei due parametri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che il sistema ammetta la soluzione $x = y = 1$.

10) **[1]** Dati gli insiemi $A = \{2n : n \in C\}$, $B = \{3n : n \in C\}$ e $C = \{1,2, \dots, 10\}$ si individui l'insieme $A \cap B$.

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30.**

Soluzioni Tema A

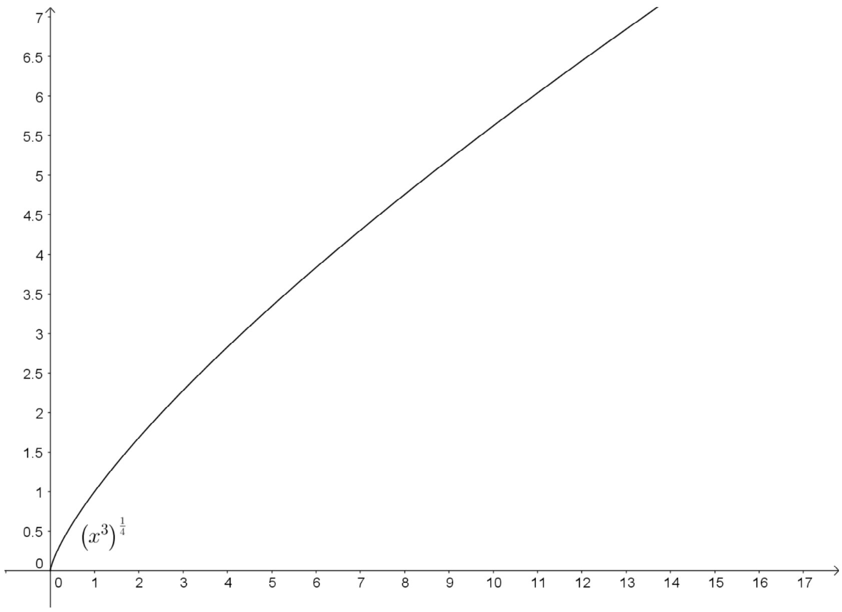
1) $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$; C.E. $x\geq 0$; $f(0)=0$

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{x^3}=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x^3}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}=0$ No as. orizzontale, no as. obliquo

$f'(x)=\mathrm{D}\,x^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ per $x>0$

$f'(x)>0$ per $x>0$ e $\lim_{x\to0^+}\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}=+\infty$

$f''(x)=\frac{3}{4}\mathrm{D}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{1}{4}-1}=-\frac{3}{16}x^{-\frac{5}{4}}=-\frac{3}{16}\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}>0$ per $x>0$, concavità verso l'alto



2) $\lim_{x\to0^+}\frac{x+\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{x\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}=\frac{1+1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=2\sqrt{2}$

3) $\frac{n+1}{n!}$ è una successione strettamente decrescente infatti
$\frac{n+2}{(n+1)!}<\frac{n+1}{n!}\Rightarrow\frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1}<\mathrm{n}+1\Rightarrow n+2<n^2+2n+1\Rightarrow$ valida già da $n=1$ in cui assume il massimo, da cui la risposta corretta è la (b) ossia 2.

4) Data $f(x)=\ln(2+|x|)$ poiché C.E. $x\in\mathbb{R}$ esclude la risposta (b), inoltre $f(-x)=\ln^2(1+|x|)=f(x)$ esclude la risposta (a).

La risposta corretta deve essere la (c) o la (d): $f'(x)=\frac{1}{2+|x|}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\frac{1}{2+x} & \text{per } x>0\\ -\frac{1}{2-x} & \text{per } x<0\end{cases}$

e poiché $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to0^-}-\frac{1}{2-x}=-\frac{1}{2}$ la risposta corretta è la (d).

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' <u>obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30</u>.**

5) $x = \log_3 e$, $\log_9 e^{\frac{1}{x}} = \log_9 e^{\frac{1}{\log_3 e}} = \frac{1}{\log_3 e}\log_9 e = \frac{1}{\log_3 e}\frac{\log_3 e}{\log_3 9} = \frac{1}{2\log_3 3} = \frac{1}{2}$ ossia la (b).

6) Per decomporre il polinomio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ usiamo una radice razionale $x = 1$
$1 - 6 + 11 - 6 = 0$ usando Ruffini si ottiene $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) =$
$(x-1)(x-2)(x-3)$strettamente positivo in $x \in (1,2) \cup (3, +\infty)$

7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ adottiamo il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{3^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\cdot 3^n(n+1)}{(n+1)^n(n+1)}\frac{n^n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} 3\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1:$$

e quindi la serie diverge.

8) $f(x) = \cos x^2$; $f'(x) = -2x\sin x^2$; $f''(x) = -2\sin x^2 - 4x^2\cos x^2$
f(0) $= 1; f'(0) = 0; f''(0) = 0$ e quindi

$$P_2(x) = 1$$

9) $\begin{cases} ax + by = 2 \\ ax - by = 1 \end{cases}$ avendo soluzione $x = y = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 1 \end{cases}$ diventa un sistema in due variabili
e ammette una sola soluzione perché a pieno rango, ossia: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, da cui

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2-1}{-2} = \frac{3}{2}; b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1-2}{-2} = \frac{1}{2}$$

10) $A = \{2n : n \in C\}$, $B = \{3n : n \in C\}$ e $C = \{1,2,\dots,10\} \Rightarrow A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$
$B = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$ e quindi

$$A \cap B = \{6,12,18\}$$

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30.**