TEMA 1

- Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$$

- Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, quando il sistema ammette autosoluzioni:

$$\begin{cases} (a - a^2 + 2)x + (3a - 2)y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ a(a-1)x - ay = 0 \end{cases}$$

- Data la funzione

$$f(x) = x + \ln(x)$$

determinare il polinomio di Taylor di punto iniziale $x_0 = 1$ arrestato al 3° ordine.

- Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

Soluzioni Tema 1

1)$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$; C. E.: $x^2 - x^3 \geq 0 \Rightarrow x^3 - x^2 \leq 0 \Rightarrow x^2(x-1) \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$, funzione che non ha simmetrie rispetto l'origine con $f(0) = f(1) = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - x^3} = +\infty; \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x^3}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2-x^3}{x^2}} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x-3x^2}{2\sqrt{x^2-x^3}} \geq 0 \text{ con } Df' = Df \setminus \{0,1\}$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{2x-3x^2}{2\sqrt{x^2-x^3}} = \lim_{x\to0^-} \frac{x(2-3x)}{2\sqrt{x^2(1-x)}} = \lim_{x\to0^-} \frac{x(2-3x)}{2(-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to0^-} \frac{\overbrace{2-3x}^{>0}}{-2\sqrt{\underbrace{(1-x)}_{>0}}} = -1$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{2x-3x^2}{2\sqrt{x^2-x^3}} = \lim_{x\to0^+} \frac{x(2-3x)}{2\sqrt{x^2(1-x)}} = \lim_{x\to0^+} \frac{x(2-3x)}{2x\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{2-3x}^{>0}}{2\sqrt{\underbrace{(1-x)}_{>0}}} = 1$$

ossia $x = 0$ è punto angoloso.

$$\lim_{x\to1^-} \frac{\overbrace{2x-3x^2}^{<0}}{2\underbrace{\sqrt{x^2-x^3}}_{\to0^+}} = -\infty \text{ flesso a tangente verticale dx}$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ per } 2x-3x^2 \geq 0 \Rightarrow 3x^2-2x \leq 0 \Rightarrow x(3x-2) \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{2}{3} \text{ con massimo in}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{12-8}{27}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0.38$$

Passiamo allo studio della derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{(2-6x)2\sqrt{x^2-x^3} - (2x-3x^2)\frac{2(2x-3x^2)}{2\sqrt{x^2-x^3}}}{4(x^2-x^3)} = \frac{2(2-6x)(x^2-x^3) - (2x-3x^2)^2}{4\sqrt{x^2-x^3}(x^2-x^3)} =$$

$$= \frac{2(6x^4-8x^3+2x^2) - 4x^2 + 12x^3 - 9x^4}{4\sqrt{x^2-x^3}(x^2-x^3)} = \frac{12x^4 - 16x^3 + 4x^2 - 4x^2 + 12x^3 - 9x^4}{4\sqrt{x^2-x^3}(x^2-x^3)} =$$

$$= \frac{3x^4 - 4x^3}{4\sqrt{x^2-x^3}(x^2-x^3)} = x^3 \frac{3x-4}{4\sqrt{x^2-x^3}(x^2-x^3)} \geq 0$$

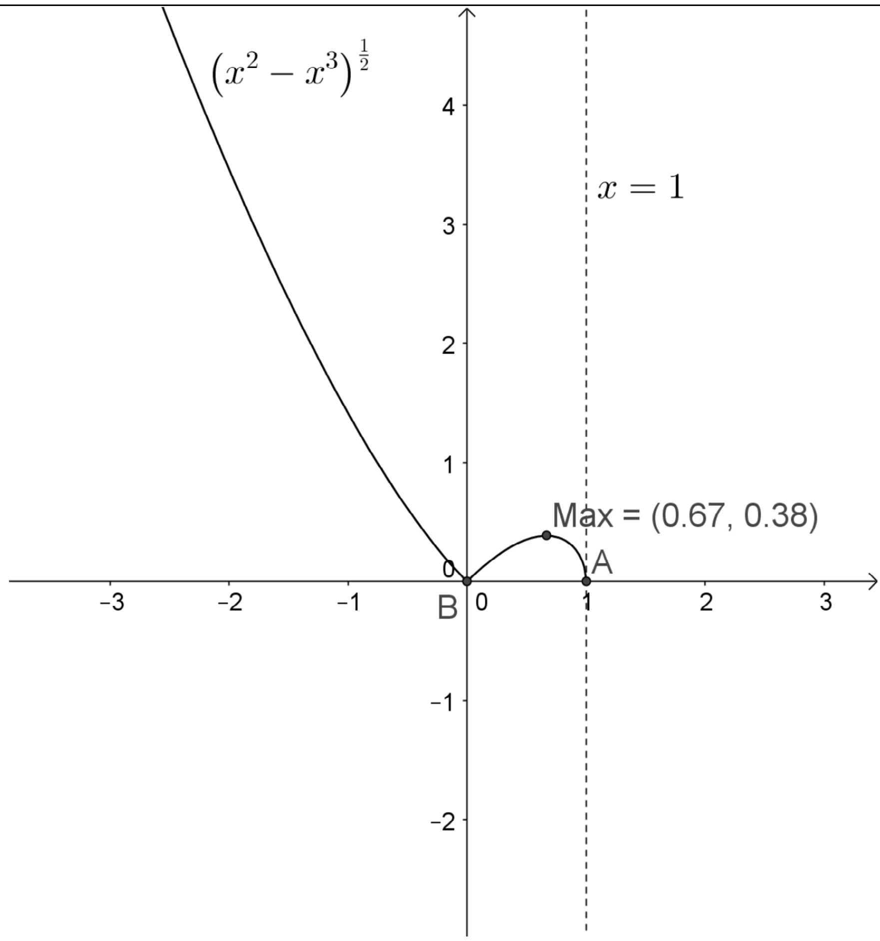
Poiché il denominatore è sempre positivo nel campo di esistenza della derivata seconda, si studia solo il numeratore

$x^3 \geq 0 \Rightarrow x > 0$ dato il dominio di $f''(x)$;

$3x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3} > 1$

da cui la funzione rivolge la concavità verso l'alto per $x < 0$ e la concavità verso il basso per $0 < x < 1$.

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.



2) $\begin{cases} (a-a^2+2)x + (3a-2)y + 2z = 0 \\ x \quad - \quad y \quad + \quad z \quad = 0 \\ a(a-1)x \quad - ay \quad = 0 \end{cases}$ il sistema ammette autosoluzione se non è a pieno rango $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a-a^2+2 & 3a-2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ a(a-1) & -a & 0 \end{vmatrix} = a(a-1)(3a-2) - 2a + 2a(a-1) + a(a-a^2+2) =$$

$= 3a^3 - 5a^2 + \cancel{2a} - \cancel{2a} + 2a^2 - \cancel{2a} + a^2 - a^3 + \cancel{2a} = 2a^3 - 2a^2 = 0 \Rightarrow a^2(a-1) = 0$ ossia il sistema ammette autosoluzioni per $a = 0 \ \vee a = 1$.

3) $f(x) = x + \ln(x)$ scrivere la formula di Taylor di punto iniziale $x_0 = 1$ arrestata al 3° ordine

$f(x) = x + \ln x$; $\qquad f(1) = 1$

$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$; $\qquad f'(1) = 2$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; $\qquad f''(1) = -1$

$f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$; $\qquad f'''(1) = 2$

e quindi la formula di Taylor richiesta è

$$f(x) \simeq 1 + 2(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ applico il criterio della radice

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ la serie converge.

E' obbligatorio svolgere lo studio di funzione.