TEMA A

1) **[6]** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\log|x|}{x}$$

2) **[4]** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^3} \right)^{-x^3}$$

3) **[3]** Scegliere la risposta corretta e giustificarla. Dato l'insieme:

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

il minimo di A è dato da:

a) 1 b) 2 c) 0 d) non esiste

4) **[4]** Data la funzione

$$f(x) = |x| \log(1 + |x|)$$

a) è dispari; b) non è definita in $x = 0$; c) è derivabile in $x = 0$; d) non è derivabile;.

5) **[1]** $\log_3 (\log_2 8) =$

a) 1; b) -1; c) 2; d) e;

6) **[2]** Decomporre il polinomio cubico $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ e studiare dove esso è POSITIVO.

7) **[4]** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

8) **[3]** Scrivere il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della funzione

$$f(x) = x \operatorname{sen} x$$

9) **[2]** Dato il sistema lineare parametrico

$$\begin{cases} ax + y = 2 \\ x - ay = 1 \end{cases}$$

determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ tale che il sistema ammetta una sola soluzione.

10) **[1]** Dati gli insiemi $A = \{2n : n \in C\}$, $B = \{3n : n \in C\}$ e $C = \{3,4, \dots, 12\}$ si individui l'insieme $A \cap B$.

Nelle parentesi quadre **[ ]** è riportato il punteggio massimo ottenibile dal quesito. **E' <u>obbligatorio il quesito numero 1 e svolgere un numero di quesiti per raggiungere 18/30</u>.**

Soluzioni Tema A

1) $f(x) = \dfrac{\log|x|}{x}$; C. E. $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; poiché $f(x) = -\dfrac{\log|x|}{x} = f(x)$ la funzione è dispari possiamo studiarla in $(0, +\infty)$ assumendo in esso la legge $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{\log x}_{\to -\infty} \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to +\infty} = -\infty$ asintoto verticale dx

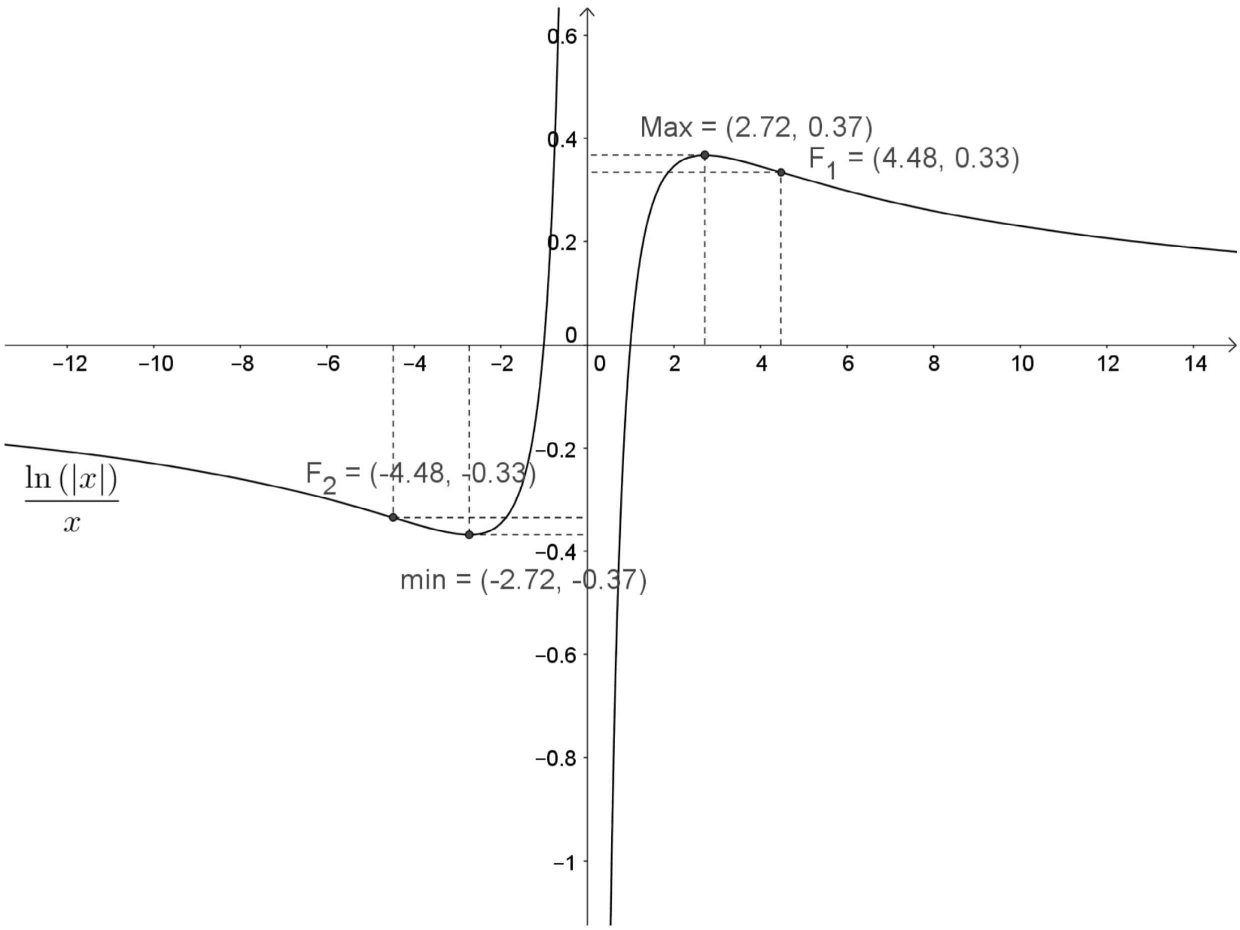
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$ (usando il rapporto fra infiniti) asintoto orizzontale dx

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x - \log x}{x^2} = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$ per $x > 0$

$f'(x) \geq 0$ per $1 - \log x \geq 0 \Rightarrow \log x \leq 1 \Rightarrow x \leq e$ ossia la funzione cresce in $0 < x < e$ e decresce per $x > e$, assumendo il massimo in $\left(e, \dfrac{1}{e}\right) \equiv (2.72, 0.37)$

$f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}x^2 - (1 - \log x)2x}{x^4} = \dfrac{-x - 2x(1 - \log x)}{x^4} = \dfrac{-1 - 2(1 - \log x)}{x^3} = \dfrac{2\log x - 3}{x^3}$ per $x > 0$

$f''(x) \geq 0 \Rightarrow 2\log x - 3 \geq 0 \Rightarrow \log x \geq \dfrac{3}{2} \Rightarrow x \geq \sqrt{e^3}$ da cui si ottiene il grafico



2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3 - 1}{x^3}\right)^{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^3}\right)^{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{-x^3}\right)^{-x^3} = e$

3) $\dfrac{n+1}{n!}$ è una successione strettamente decrescente infatti

$\dfrac{n+2}{(n+1)!} < \dfrac{n+1}{n!} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1} < n+1 \Rightarrow n+2 < n^2+2n+1 \Rightarrow$ valida già da $n=1$. $\lim\limits_{\mathrm{n}\to+\infty} \dfrac{n+1}{n!} = 0$

ma esso è l'estremo inferiore e non il minimo, da cui la risposta corretta è la (d).

4) Data $f(x) = |x|\log(1+|x|)$ poiché C. E. $x \in \mathbb{R}$ esclude la risposta (b), inoltre

$f(-x) = |x|\log(1+|x|) = f(x)$ esclude la risposta (a).

La risposta corretta deve essere la (c) o la (d): $f'(x) = \dfrac{|x|}{x}(\log(|x|+1) + \dfrac{|x|}{|x|+1} =$

$$= \begin{cases} \log(x+1) + \dfrac{x}{x+1} & \text{per } x > 0 \\ \log(1-x) - \dfrac{x}{1-x} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

e poiché $\lim\limits_{x\to0^+} \log(x+1) + \dfrac{x}{x+1} = 0$ e $\lim\limits_{x\to0^-} \log(1-x) - \dfrac{x}{1-x} = 0$ la risposta corretta è la (c).

5) $\log_3(\log_2 8) = \log_3(\log_2 2^3) = \log_3 3 = 1$ ossia la (a).

6) Per decomporre il polinomio $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ usiamo una radice razionale $x = 1$

$1 - 3 + 5 - 3 = 0$ usando Ruffini si ottiene $x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = (x-1)(x^2 - 2x + 3)$

poichè $\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + 3$ è irriducibile e positivo, il segno dipende da $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$.

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ adottiamo il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 2^n(n+1)}{(n+1)^n(n+1)} \frac{n^n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1:$$

e quindi la serie converge.

8) $f(x) = x\operatorname{sen} x$; $f'(x) = \operatorname{sen} x + x\cos x$; $f''(x) = \cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x = 2\cos x - x\operatorname{sen} x$

$\mathrm{f}(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = 2$ e quindi

$$P_2(x) = x^2$$

9) $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x - ay = 1 \end{cases}$ rango matrice incompleta $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = -1$ impossibile

ossia è a pieno rango e ammette sempre una soluzione per $a \in \mathbb{R}$.

10) $A = \{2n : n \in C\}$, $B = \{3n : n \in C\}$ e $C = \{3,4,\dots,12\} \Rightarrow A = \{6,8,10,12,14,16,18,20,22,24\}$

$B = \{9,12,15,18,21,24,27,30,33,36\}$ e quindi

$$A \cap B = \{12,18,24\}$$