

TEMA 1

1) [6] Studiare la funzione

$$f(x) = e^x \sqrt{x}$$

2) [3] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{x} |\log^5 x|$$

3) [3] Scegliere la risposta corretta e giustificarla. Dato l'insieme:

$$A = \left\{ \left(\frac{1+n}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

e sapendo che esso rappresenta il coinsieme di una successione strettamente crescente, l'estremo superiore di A :

- a) non esiste; b) è < 2 c) è 1 d) è > 2

4) [3] Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x + \frac{x}{|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

valutare la continuità e la derivabilità della funzione nel suo dominio.

5) [3] Le soluzioni dell'equazione $e^{-|x|} = \sqrt{\pi}$ sono:

- a) due opposte; b) due negative; c) nessuna soluzione; d) una soluzione;

6) [1] Decomporre il polinomio $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ e studiare dove esso è negativo.

7) [4] Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt[3]{n^3 + 1} - n$$

8) [3] Dopo avere verificato le ipotesi si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = x|x|$$

nell'intervallo chiuso $[-1, 1]$.

9) [2] Trovare le soluzioni del seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - ky = 3 \\ x + y + z = 2 \\ kx + y - z = 1 \end{cases}$$

10) [2] Indicare quale di questi valori può rappresentare la cardinalità di un insieme delle parti (di un insieme con un numero finito di elementi), motivando la risposta:

- a) 0; b) 14; c) 32; d) 34;

Soluzioni Tema A

1) $f(x) = e^x \sqrt{x}$; C.E. $x \geq 0$, inoltre $f(x) \geq 0 \forall x \geq 0$ con $f(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \sqrt{x} = +\infty$; $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty \Rightarrow$ non esiste asintoto obliquo

$$f'(x) = e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = e^x \frac{2x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{con C.E. } x > 0$$

Evidentemente, poiché $e^x > 0$, $2\sqrt{x} > 0$ per ogni $x > 0$ si avrà che $f'(x) \geq 0$ per $2x+1 \geq 0$ ossia

$$x \geq -\frac{1}{2} \cap x > 0 \Rightarrow x > 0$$

da cui la $f'(x) > 0, \forall x > 0$, e quindi la $f(x)$ è strettamente crescente nel suo dominio con tangente sinistra in $x = 0$ data da $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = +\infty$

$$f''(x) = e^x \frac{2x+1}{2\sqrt{x}} + e^x \frac{4\sqrt{x} - (2x+1)2 \frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x} = e^x \frac{2x+1}{2\sqrt{x}} + e^x \frac{4x-2x-1}{4x\sqrt{x}} = e^x \frac{4x^2+4x-1}{4x\sqrt{x}}, \forall x > 0$$

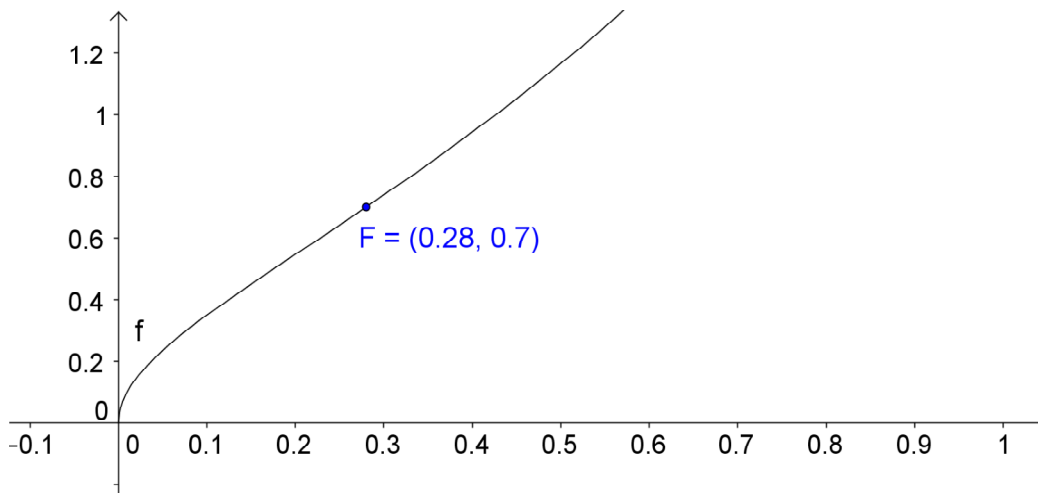
Data la positività di $e^x, 4x\sqrt{x}$, nel dominio $x > 0$ si ha che $f''(x) \geq 0$ se $4x^2 + 4x - 1 \geq 0$ e poiché

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 4 = 8 \Rightarrow x = \frac{-2 \mp 2\sqrt{2}}{4} = \begin{cases} \frac{-1 - \sqrt{2}}{2} \cong -1,78 \\ \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} \cong +0,28 \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$x \leq -1,78 \vee x \geq +0,28 \cap x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ per $x > 0,28, f''(x) < 0$ per $0 < x < 0,28$

in $x = 0,28$ si ha flesso $F(0,28, 0,7)$ con tangente obliqua pari a $f'(0,28) = 1,95$

prima di questo flesso la funzione rivolge la concavità verso il basso mentre dopo il flesso rivolge la concavità verso l'alto.



$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[4]{x} |\log^5 x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\log^5 x|}{\frac{1}{x}} \quad \text{ponendo } \frac{1}{t} = x, \text{ ossia } t = \frac{1}{x}, \text{ da cui per } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow +\infty \text{ si ha che}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\log^5 x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|\log^5 \frac{1}{t}|}{\frac{1}{t^4}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left| \left(\log \frac{1}{t} \right)^5 \right|}{\frac{1}{t^4}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|(\log 1 - \log t)^5|}{\frac{1}{t^4}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|-\log^5 t|}{\frac{1}{t^4}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|\log^5 t|}{\frac{1}{t^4}} = 0 \text{ poiché il numeratore è infinito di ordine inferiore al denominatore}$$

3) $A = \left\{ \left(\frac{1+n}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ è il coinsieme di una successione strettamente crescente.

(evidentemente è la successione di Nepero). Il suo estremo superiore è proprio $e > 2$ e quindi la risposta esatta è la (d).

4) Evidentemente l'unico punto a poter dare problemi per la continuità e la derivabilità è $x = 0$ infatti per tale valore del dominio $f(0) = 0$ ma se studiamo limite destro e sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -x + \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x + \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -x + \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x + 1 = +1$$

Evidentemente i due limiti sono diversi e differenti dal valore assunto dalla funzione che risulta pertanto non continua né derivabile in $x = 0$.

$$5) e^{-|x|} = \sqrt{\pi} \Rightarrow \frac{1}{e^{|x|}} = \sqrt{\pi} \Rightarrow e^{|x|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow |x| = \log \frac{1}{\sqrt{\pi}} = -\log \sqrt{\pi} \text{ che è impossibile}$$

La risposta corretta è la (c).

6) Il polinomio $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ ha possibili radici razionali $\pm 1, \pm 3, \pm 9$, si vede subito che $x = 1$ è uno zero. Utilizziamo Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 3 & -9 \\ 1 & & 1 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & 0 \end{array}$$

$$\text{ossia } x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x - 1)(x^2 + 6x + 9) = (x - 1)(x + 3)^2 < 0 \text{ se } x - 1 < 0 \text{ ossia}$$

$$x < 1 \wedge x \neq -3$$

7) $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt[3]{n^3 + 1} - n$ Il termine generale della serie è una successione infinitesima, infatti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^3 + 1} - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 1 - n^3}{\sqrt[3]{(n^3 + 1)^2} + n^3 \sqrt[3]{n^3 + 1} + n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n^3 + 1)^2} + n^3 \sqrt[3]{n^3 + 1} + n^2} = 0$$

Come si vede dal calcolo del limite a denominatore è presente un termine divergente con natura polinomiale di tipo n^2 . Per tale motivo proviamo a confrontare la serie in questione con la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n^3 + 1} - n) n^2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n^3 + 1)^2 + n^3 \sqrt{n^3 + 1}} + n^2} n^2 = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}} + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

8) $f(x) = x|x|$ è continua in $[-1, 1]$ in quanto il termine in valore assoluto si annulla nello zero della funzione e quindi $f(0) = 0$. Vediamo la derivabilità:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -2x & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 2|x|$$

Ossia la derivata prima si annulla nello zero del valore assoluto con la conseguenza che la funzione è derivabile in $x = 0$. Per Lagrange deve succedere:

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 2|c| \Rightarrow \frac{1 - (-1)}{2} = 2|c| \Rightarrow \frac{2}{2} = 2|c| \Rightarrow |c| = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \mp \frac{1}{2}$$

9) $\begin{cases} x - ky = 3 \\ x + y + z = 2 \\ kx + y - z = 1 \end{cases}$ la matrice incompleta associata al sistema è $\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$ il cui determinante vale

$\det(\text{incompleta}) = -1 - k^2 - 1 - k = -k^2 - k - 2$; proviamo a imporre l'annullamento del determinante ossia $k^2 + k + 2 = 0$, $\Delta = 1 - 8 < 0$ si vede che il sistema è a pieno rango e quindi per Rouché-Capelli ammette 1 ed 1 sola soluzione dipendente dal parametro k .

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-k^2 - k - 2} = \frac{-3 - k - 3 - 2k}{-k^2 - k - 2} = \frac{-3k - 6}{-k^2 - k - 2} = \frac{3k + 6}{k^2 + k + 2} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-k^2 - k - 2} = \frac{-2 + 3k - 1 + 3}{-k^2 - k - 2} = \frac{3k}{-k^2 - k - 2} = -\frac{3k}{k^2 + k + 2} \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -k & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-k^2 - k - 2} = \frac{1 - 2k^2 + 3 - 3k - 2 + k}{-k^2 - k - 2} = \frac{-2k^2 - 2k + 2}{-k^2 - k - 2} = \frac{2k^2 + 2k - 2}{k^2 + k + 2} \end{aligned}$$

10) Poiché l'insieme delle parti ha cardinalità pari a 2^n con n gli elementi dell'insieme di partenza l'unica risposta possibile è la (c).