MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) PROVA IN ITINERE 2015/16

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

1) Individuare il campo di esistenza, i limiti, la derivata prima e relativo dominio, della funzione:

$$f(x) = x \log x^2$$

2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^{3x} - 1}{\sin x}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

4) Calcolare

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-2x}\right)$$

Riportare solo i passaggi essenziali

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

5) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x & \text{se } x \geq 1 \\ -x + k & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

MATR.___________ COGNOME_______________ NOME________________

Soluzioni Tema A

1) $f(x) = x \log x^2$; C.E. $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, f(-x) = -x \log(-x)^2 = -x \log x^2 = -f(x)$ funzione dispari che studio in $x \in (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to0^+} x \log x^2 = \lim_{x\to0^+} \frac{\log(x^2)}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -2x = 0^- \text{ No asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \log x^2 = +\infty; \text{ No asintoto orizzontale;}$$

$$f'(x) = \log x^2 + x\,\frac{2x}{x^2} = \log x^2 + 2\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

2) $$\lim_{x\to0} \frac{2^{3x}-1}{\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{3 \cdot 2^{3x} \log 2}{\cos x} = \frac{3 \cdot 1 \cdot \log 2}{1} = 3 \log 2 = \log 8$$

3) $$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{1+x-1+x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{1+1} = 1$$

4) $$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-2x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-2x}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{(1-2x)^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(2 \cdot (1-2x)^{-2}\right) =$$

$$= 2 \cdot (-2)(1-2x)^{-3}(-2) = \frac{8}{(1-2x)^3}$$

5) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x & \text{se } x \geq 1 \\ -x + k & \text{se } x < 1 \end{cases}$ i due pezzi in cui è divisa la funzione sono continui, inoltre

$f(1) = 2 + 4 = 6 = \lim_{x\to1^-} -x + k = -1 + k \Rightarrow k = 7$ è la condizione cercata.

Riportare solo i passaggi essenziali