MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) PROVA IN ITINERE 2015/16

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA B

1) Individuare il campo di esistenza, i limiti, la derivata prima e relativo dominio, della funzione:

$$f(x) = x^2 \log x$$

2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sin x - \sin 4}{x - 4}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^3} \right)^{x^3}$$

4) Calcolare

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{e^{x^2}}{x} \right)$$

Riportare solo i passaggi essenziali

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

5) Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1 \\ ax - x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

Soluzioni Tema B

1) $f(x) = x^2 \log x$; C.E. $x > 0$, con $f(1) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0^- \text{; No asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log x = +\infty\text{; No asintoto orizzontale}$$

$$f'(x) = 2x\log x + \frac{x^2}{x} = 2x\log x + x = x(2\log x + 1);\quad \text{con C.E. } x > 0;$$

2) $$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin x - \sin\alpha}{x-\alpha} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to\alpha} \frac{\cos x}{1} = \cos\alpha$$

3) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3}\right)^{x^3} = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{x^3} = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x^3}\right)^{-x^3}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

4) $$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x\, e^{x^2}x - e^{x^2}}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2e^{x^2} - e^{x^2}}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(2e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x^2}\right) =$$

$$= 4xe^{x^2} - \frac{2xe^{x^2}x^2 - e^{x^2}2x}{x^4} = 4xe^{x^2} - 2e^{x^2}\frac{x^2-1}{x^3} = 2e^{x^2}\left(2x - \frac{x^2-1}{x^3}\right)$$

5) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1 \\ ax - x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ i due pezzi in cui è divisa la funzione sono continui, inoltre

$f(1) = a - 1 = \lim_{x\to 1^-} x + 1 = 2 \Rightarrow a = 3$ è la condizione cercata.