MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) PROVA IN ITINERE 2015/16

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA C

1) Individuare il campo di esistenza, i limiti, la derivata prima e relativo dominio, della funzione:

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$$

2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\log(x-1)}{\sqrt[3]{x-2}}$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital (*consiglio* liberare il valore assoluto):

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[4]{x}\,|\log^5 x|$$

4) Calcolare

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sin x^2)$$

Riportare solo i passaggi essenziali

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

5) Determinare $b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} bx + 2 & \text{se } x < -1 \\ 2x & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \\ 4x - b & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

Soluzioni Tema C

1) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$; $\quad$ C.E. $x > 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$; asintoto verticale dx

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$; No asintoto orizzontale

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x}{x} = e^x \frac{\frac{2x-1}{2\sqrt{x}}}{x} = e^x \frac{2x-1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{con C.E. } x > 0$$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\log(x-1)}{\sqrt[3]{x-2}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x-1} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[4]{x}\,|\log^5 x| = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\log^5 x}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log^5 \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}}$ ponendo $t = \dfrac{1}{x}$, da cui per $x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log^5 t}{t^{\frac{1}{4}}} = \lim\limits_{t\to +\infty} \left(\dfrac{\log t}{t^{\frac{1}{20}}}\right)^5 = 0$ poiché il numeratore è infinito di ordine inferiore al denominatore.

4) $\dfrac{d^2}{dx^2}(\sin x^2) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}(\sin x^2)\right) = \dfrac{d}{dx}(2x\cos x^2) = 2\cos x^2 - 2x \cdot 2x \sin x^2 = 2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2$

5) $f(x) = \begin{cases} bx + 2 & \text{se } x < -1 \\ 2x & \text{se } -1 \le x \le 2 \\ 4x - b & \text{se } x > 2 \end{cases}$ i tre pezzi in cui è divisa la funzione sono continui, inoltre

$f(-1) = -2 = \lim\limits_{x\to -1^-} bx + 2 = -b + 2 \Rightarrow -b + 2 = -2 \Rightarrow b = 4$ se il valore è corretto si deve avere continuità anche nel punto $x = 2 \Rightarrow f(2) = 4 = \lim\limits_{x\to 2^+} 4x - 4 = 8 - 4 = 4$,
che conferma quanto ipotizzato