MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   I SESSIONE I APPELLO, 2015/16

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione: $f(x) = xe^x$

C.E. $x \in \mathbb{R}$, la funzione non ha simmetrie rispetto l'origine.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{e^{-x}} = 0 \qquad \text{asintoto orizzontale sx}$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty; \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = +\infty \qquad \text{no asintoto obliquo dx}$$

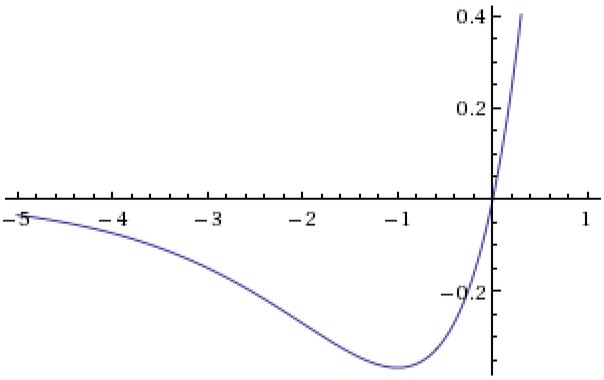
$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x), x \in \mathbb{R}$

$f'(x) \geq 0$ per $1 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow f(x)$ decresce in $(-\infty, -1)$ e cresce in $(-1, +\infty)$, ha minimo in $\min(-1, -\frac{1}{e})$

$f''(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x), x \in \mathbb{R}$

$f''(x) \geq 0$ per $2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow$ concava in $(-\infty, -2)$, convessa in $(-2, +\infty)$,

flesso in $F(-2, -\frac{2}{e^2})$



2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to1} \frac{\log x}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{\log x}{x^2 - 1} \overset{H}{=} \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \cos x\,(\log(x+1)-\log(x-1))$$

$\lim_{x\to+\infty} \cos x\,(\log(x+1)-\log(x-1)) = \lim_{x\to+\infty} \cos x \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$ perché prodotto di una funzione limitata $(\cos x)$ per una infinitesima $\left(\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+4x & \text{se } x \geq 1 \\ -x+k & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$f(1) = 2+4 = 6 = \lim_{x\to 1^-} -x+k = k-1 \Rightarrow k-1 = 6 \Rightarrow k = 7$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = x|x|$$

nell'intervallo [-1, 1].

$f(x)$ è continua in $[-1,1]$

$f'(x) = |x| + x\frac{|x|}{x} = 2|x|$ e poiché $\lim_{x\to 0^\pm} 2|x| = 0 \Rightarrow f(x)$ è derivabile in $(-1,1)$

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 = 2|c| \Rightarrow |c| = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \mp\frac{1}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^2 xe^x dx$$

$$\int xe^x dx = x\, e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

da cui

$$\int_0^2 xe^x dx = [e^x(x-1)]_0^2 = e^2(2-1) - e^0(-1) = e^2 + 1$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{-5}^2 \log(x+5)\, dx$$

Poniamo $x + 5 = u \Rightarrow dx = du$ da cui

$$\int \log(x+5)\, dx = \int \log(u) du = u \log u - \int \frac{u}{u} du = u \log u - u + c = u(\log u - 1) + c =$$
$$= (x+5)(\log(x+5) - 1) + c \text{ da cui si ottiene:}$$

$$\int_{-5}^2 \log(x+5)\, dx = \lim_{\epsilon \to o^+} \int_{-5+\epsilon}^2 \log(x+5)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} [(x+5)\,(\log(x+5) - 1)]_{-5+\epsilon}^2 =$$
$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} 7(\log 7 - 1) - (-5 + \epsilon + 5)(\log(-5 + \epsilon + 5) - 1) =$$
$$= 7 \log 7 - 7 - \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon \log(\epsilon) - \epsilon = 7 \log 7 - 7$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n^2+2)2^n}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica avendo posto $x = 1$).

Criterio del rapporto: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+2)2^n}{((n+1)^2+2)2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2+2}{n^2+2n+3} = \frac{1}{2}$ da cui $R = 2$

Poiché la serie è centrata in $c = 0$ l'intervallo di convergenza potrebbe essere $(-2, 2)$. Controlliamo gli estremi

Se $x = 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n^2+2)2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2}$ che è maggiorata dalla serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, ossia converge

Se $x = -2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(n^2+2)2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$ che in valore assoluto è maggiorata dalla serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$,

ossia la prima serie è assolutamente convergente e quindi converge, ne consegue che $I = [-2, 2]$.

(caso $x = 1$)

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+2)2^n}$ usando il criterio del rapporto si vede chiaramente che $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+2)2^n}{((n+1)^2+2)2^{n+1}} =$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2+2}{n^2+2n+3} = \frac{1}{2} < 1$ ossia la serie è convergente.

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 3 della seguente funzione:

$$f(x) = \log^2(x+1)$$

$f(x) = \log^2(x+1) \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{2\log(x+1)}{x+1} \Rightarrow f'(x) = 0$

$f''(x) = \frac{\frac{2(x+1)}{x+1} - 2\log(x+1)}{(x+1)^2} = 2\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = 2$

$f'''(x) = 2\frac{-\frac{(x+1)^2}{x+1} - 2(1-\log(x+1))(x+1)}{(x+1)^4} = 2\frac{-1-2+2\log(x+1)}{(x+1)^3} = 2\frac{2\log(x+1)-3}{(x+1)^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'''(x) = -6$

E il polinomio risultante è: $P^3(x) = \frac{2x^2}{2!} - 6\frac{x^3}{3!} = x^2 - x^3$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x-2y+z+t=-1 \\ x-y-z-t=2 \\ x-2y-z+t=-1 \\ x-y+z-t=2 \end{cases}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare il sistema avendo eliminato la quarta equazione e ponendo $t=0$).

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ da cui si ottiene}$$

$$\begin{cases} x-2y+z+t=-1 \\ y-2z-2t=3 \\ -2z=0 \\ t\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+t=-1 \\ y-2t=3 \\ z=0 \\ t\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6-4t+t=-1 \\ y=3+2t \\ z=0 \\ t\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5+3t \\ y=3+2t \\ z=0 \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione generale $(5+3k, 3+2k, 0, k), k\in\mathbb{R}$

(Caso ridotto)

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1+2-2+1-2-2=-2$ il sistema è a pieno rango ed è crameriano:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-1-2-4-1-4+2}{-2}=5$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-2+1-1-2-1-1}{-2}=3$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{1-4+2-1+4-2}{-2}=0$$

Riportare solo i passaggi essenziali