MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I SESSIONE I APPELLO, 2015/16

MATR.__________ COGNOME______________ NOME______________

TEMA B

I PARTE

1) Studiare la funzione: $f(x) = \frac{e^x}{x}$

C.E. $x \in \mathbb{R}/\{0\}$, la funzione non ha simmetrie rispetto l'origine.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ asintoto orizzontale sx

$\lim\limits_{x\to 0^{\mp}} \frac{e^x}{x} = \mp\infty$ asintoto verticale dx e sx

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ no asintoto obliquo dx

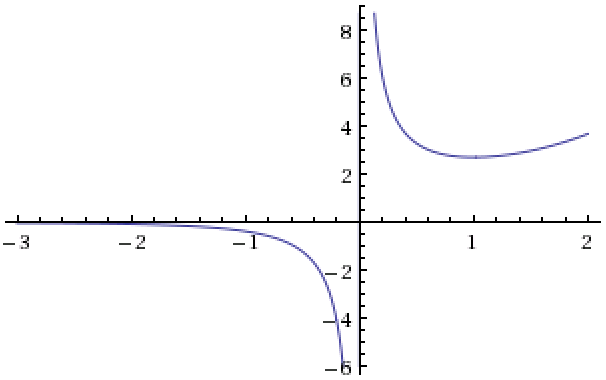
$f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = e^x \frac{x-1}{x^2}, x \in \mathbb{R}/\{0\}$

$f'(x) \geq 0$ per $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow f(x)$ decresce in $(-\infty, 0) \cup (0,1)$e cresce in $(1, +\infty)$, ha minimo in $\min(1, e)$

$$f''(x) = e^x \frac{x-1}{x^2} + e^x \frac{x^2 - (x-1)2x}{x^4} = e^x\left(\frac{x-1}{x^2} + \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4}\right) = e^x\left(\frac{x-1}{x^2} + \frac{-x^2+2x}{x^4}\right) =$$

$$= e^x\left(\frac{x-1}{x^2} + \frac{-x+2}{x^3}\right) = e^x \frac{x^2 - x - x + 2}{x^3} = e^x \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}, x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

poiché $x^2 - 2x + 2 > 0$ $(\Delta < 0) \Rightarrow$ $f''(x) \geq 0$ per $x^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq\Rightarrow$ concava in $(-\infty, 0)$, convessa in $(0, +\infty)$,



2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(x-1)}{\sqrt[3]{x-2}}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(x-1)}{\sqrt[3]{x-2}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}} = \lim_{x\to 2} \frac{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x-1} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}\right]^{-1} = \frac{1}{e}$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1 \\ kx - x^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = k - 1 = \lim_{x\to1^-} x + 1 = 2 \Rightarrow k - 1 = 2 \Rightarrow k = 3$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

nell'intervallo [-1, 1].

$f(x)$ è continua in $[-1,1]$

$f'(x) = -\frac{|x|}{x}\frac{1}{(1+|x|)^2}$ poiché:

$$\lim_{x\to0^-} -\frac{|x|}{x}\frac{1}{(1+|x|\,)^2} = \lim_{x\to0^-} 1\frac{1}{(1-x)^2} = 1$$

$$\lim_{x\to0^+} -\frac{|x|}{x}\frac{1}{(1+|x|\,)^2} = \lim_{x\to0^-} -1\frac{1}{(1+x)^2} = -1$$

$f(x)$ non è derivabile in $(-1,1)$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^2 \log(x^2)\, dx$$

$$\int \log(x^2)\, dx = x\log(x^2) - \int x\frac{2x}{x^2}\, dx = x\log(x^2) - 2\int dx = x\log(x^2) - 2x + c$$

$$\int_1^2 \log(x^2)\, dx = [x\log(x^2) - 2x]_1^2 = 2\log 4 - 4 - 1\log 1 + 2 = 2\log 4 - 2 = 2(\log 4 - 1)$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}\, dx$$

Poniamo $\sqrt{x} = u \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = du,$ inoltre $x = u^2$ e $1 - x = 1 - u^2$ da cui:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}\, dx = 2\int \frac{1}{1-u^2}\, dx = 2\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c = \log\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + c \qquad \text{da cui si ottiene:}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\log\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|\right]_{1+\epsilon}^2$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\log\left|\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right| - \log\left|\frac{1+\sqrt{1+\epsilon}}{1-\sqrt{1+\epsilon}}\right| = +\infty \ \text{ non converge}$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{x^{3n}}{2^n}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica avendo posto $x = 1$).

Ponendo $z = x^3$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{z^n}{2^n}$ applicando il criterio del rapporto si ottiene

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+3}\frac{n+2}{n+1}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3} = \frac{1}{2}$ da cui $R = 2$ e poiché $z = x^3$ $(c = 0)$ ne consegue

che $\left(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$ è l'intervallo di convergenza essere, valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{(\sqrt[3]{2})^{3n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}$ che diverge in quanto a_n non è infinitesimo

Se $x = -\sqrt[3]{2} \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{(-\sqrt[3]{2})^{3n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2}\frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$ è indefinita

(caso $x = 1$)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{2^n}$ usando il criterio del rapporto si vede chiaramente che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+3}\frac{n+2}{n+1}\frac{2^n}{2^{n+1}} =$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3} = \frac{1}{2} < 1 \text{ e quindi converge}$$

9) Calcolare il polinomio di Mac Laurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \Rightarrow f(0) = -1$

$f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \Rightarrow f'(0) = 0$

$$f''(x) = \frac{6\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - 3\frac{2}{3}\frac{4x^2}{\sqrt[3]{x^2-1}}}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} = \frac{6(x^2-1)-4x}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^5}} = \frac{6x^2-4x-6}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^5}} \Rightarrow f''(0) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = -1 + \dfrac{2}{3}\dfrac{x^2}{2!} = -1 + \dfrac{x^2}{3}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x + y - z + t = 1 \\ x + y + z + t = 2 \\ 3x + y + 5z + t = 6 \end{cases}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare il sistema avendo eliminato la quarta equazione e ponendo $t = 0$).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-3R_1]{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-2R_2]{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-3R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ da cui si ottiene}$$

$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ 2y - 2z + 2t = 0 \\ 2z = 1 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + \dfrac{1}{2} - t = 1 \\ y - \dfrac{1}{2} + t = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \dfrac{1}{2} + t + \dfrac{1}{2} - t = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} - t \\ z = \dfrac{1}{2} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} - t \\ z = \dfrac{1}{2} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione generale $\left(1, \frac{1}{2} - k, \frac{1}{2}, k\right), k \in \mathbb{R}$

(Caso ridotto)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 = 4 \text{ il sistema è a pieno rango ed è crameriano:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1 + 2 + 1 - 2 + 1 + 1}{4} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2 - 1 + 1 - 1 - 1 + 2}{4} = \frac{1}{2}$$