MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   I SESSIONE II APPELLO, 2015/16

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione: $f(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$

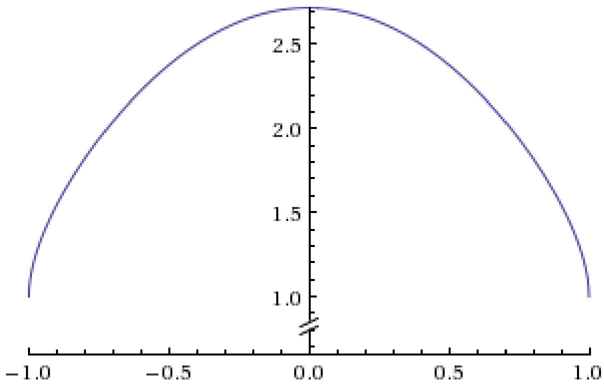
C.E. $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1, 1]$, la funzione è pari dato che $f(x) = e^{\sqrt{1-(-x)^2}} = e^{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$.
$f(1) = f(-1) = e^0 = 1$

$$f'(x) = \frac{-2x\, e^{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0$ ossia $\forall x \in (-1, 0)$, mentre $f'(x) < 0$ in $(0, 1)$
$f'(x) = 0$ in $x = 0$ da cui $max(0, e)$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

non c'è bisogno di studiare la derivata seconda data la simmetria e il limite della derivata prima all'estremo.



2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\log(x+1))}{\log x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\log(x+1))}{\log x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{(x+1)\log(x+1)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{(x+1)\log(x+1)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log(x+1) + \frac{x+1}{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log(x+1) + 1} = 1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos(e^x)-1}{\log(1-e^x)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos(e^x)-1}{\log(1-e^x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos(e^x)-1}{e^x\,\dfrac{\log(1-e^x)}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1-\cos(e^x)}{e^x}\frac{1}{\log(1-e^x)^{\frac{1}{e^x}}}=0\,\frac{1}{\log e}=0$$

4) Determinare $k\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{k}{2} & \text{se } x<1\\ kx-1 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

$$f(1)=k-1=\lim_{x\to1^-}x^2+\frac{k}{2}=1+\frac{k}{2}\Rightarrow k-1=1+\frac{k}{2}\Rightarrow\frac{k}{2}=2\Rightarrow k=1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=x(2|x|-x^2)$$

nell'intervallo [-2, 2].

$f(x)$ è continua in $[-2,2]$, inoltre $f(-2)=-2(4-4)=0=f(2)$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(2x|x|-x^3)=2|x|+2x\frac{|x|}{x}-3x^2=2|x|+2|x|-3x^2=4|x|-3x^2$$

applicando il criterio sufficiente di derivabilità in $x=0$, si vede che $\lim_{x\to0^\pm}4|x|-3x^2=0$ ossia

la funzione è derivabile in $(-2,2)$. Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$f'(x)=0\Rightarrow 4|x|-3x^2=0$ che riconduce a

per $x\in(-2,0]\Rightarrow -4x-3x^2=0\Rightarrow x(3x+4)=0\Rightarrow x_1=0\vee x_2=-\dfrac{4}{3}$

per $x\in(0,2)\Rightarrow 4x-3x^2=0\Rightarrow x(3x-4)=0\Rightarrow x_1=0\vee x_3=\dfrac{4}{3}$

ossia i punti che verificano Rolle sono $x_1=0, x_2=-\dfrac{4}{3}, x_3=\dfrac{4}{3}$

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\,dx$$

Ponendo $2x+1=u \Rightarrow \frac{1}{2}du = dx$ si ha che

$$\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\log u}{u^2}dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\log u}{u} - \int -\frac{1}{u}\frac{1}{u}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\log u}{u} - \int -\frac{1}{u^2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\log u}{u} - \frac{1}{u}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\log(2x+1)}{2x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) + c = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x+1}(\log(2x+1)+1)\right) + c$$

da cui

$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2x+1}(\log(2x+1)+1)\right]_0^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}(\log 5+1) - 1\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\log 5 + 1 - 5}{5}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\log 5 - 4}{5} = \frac{4-\log 5}{10}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+5)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+5)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = \frac{1}{2}\frac{(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2+5}} + c \text{ da cui si ottiene:}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}dx = \lim_{h\to+\infty}\int_1^h \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}dx = \lim_{h\to+\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right]_1^h = \lim_{h\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{h^2+5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{n} x^{n}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n-1}}$).

Criterio della radice: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}-1 = 0$ da cui $R = +\infty$

La serie, centrata in $c = 0$, ha come l'intervallo di convergenza tutto l'asse dei numeri reali.

(caso studenti anni precedenti)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n-1}}$$

Analizziamo il termine generale della serie:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} 3\frac{n^n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{3}\right)^n = +\infty$ poiché il termine generale della serie è divergente, la serie diverge.

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato su $x = 1$, della seguente funzione:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{x} + 2$$

$f(x) = x^3 - \frac{3}{x} + 2 \Rightarrow f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$

$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 3 + 3 = 6$

$f''(x) = 6x - \frac{6}{x^3} \Rightarrow f''(1) = 0$

$f'''(x) = 6 + \frac{18}{x^4} \Rightarrow f'''(1) = 24$

E il polinomio risultante è: $P^3(x) = 6(x-1) + 24\frac{(x-1)^3}{3!} = 6(x-1) + 4(x-1)^3$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Trovare, se esiste, l'inversa della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Anno in corso)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{3R_3}{11}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+\frac{2}{3}R_3]{R_1+\frac{2}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right)$$

(Anni precedenti)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 0 - 0 + 2 + 3 = 11 \ \neq 0 \text{ è invertibile}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui l'inversa della matrice è:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

Riportare solo i passaggi essenziali