MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   I SESSIONE II APPELLO, 2015/16

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA B

I PARTE

1) Studiare la funzione: $f(x) = \log\sqrt{4-x^2}$

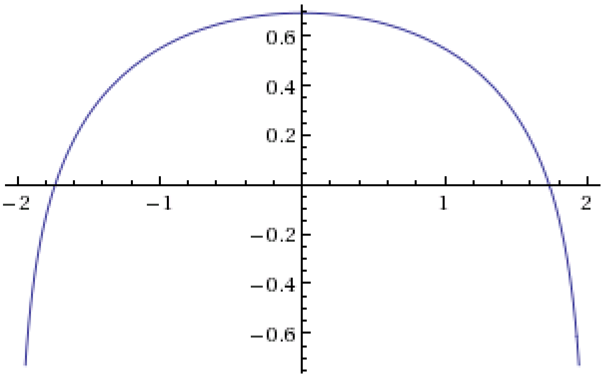
C.E. $x \in (-2, 2)$, la funzione è pari e la studiamo in [0, 2), $f(0) = \log 2$

$\lim_{x\to 2^-} \log\sqrt{4-x^2} = -\infty$ asintoto verticale sx

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{4-x^2}, x \in (-2, 2)$

$f'(x) \geq 0$ per $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow f(x)$ cresce in $(-2, 0)$ e decresce in $(0, 2)$,

ha massimo in $\max(0, \log 2)$ non è necessario studiare la derivata seconda.



2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}\sqrt{1+2x}-1}{4x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}\sqrt{1+2x}-1}{4x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}\sqrt{1+2x}+e^{3x}\frac{2}{2\sqrt{1+2x}}}{4} = \lim_{x\to 0} e^{3x}\frac{3(1+2x)+1}{4\sqrt{1+2x}} = \frac{3+1}{4} = 1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} kx^2-1 & \text{se } x>1 \\ x & \text{se } x\leq 1 \end{cases}$$

$$f(1)=1=\lim_{x\to 1^+} kx^2-1=k-1 \Rightarrow k-1=1 \Rightarrow k=2$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2x+1}$$

nell'intervallo [0, 2].

$f(x)$ è continua in $[0,2]$ e inoltre $f(0)=f(2)=1$

$$f'(x)=\frac{2x(2x+1)-2(x^2+1)}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2+2x-2x^2-2}{(2x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-2}{(2x+1)^2}=0 \text{ se:}$$

$$2x^2+2x-2=0 \Rightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow \Delta=1+4=5; x=\frac{-1\mp\sqrt{5}}{2} < \begin{matrix} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin (0,2) \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in (0,2) \end{matrix}$$

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito (usare l'adeguata sostituzione cambiando anche gli estremi di integrazione):

$$\int_0^5 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

poniamo $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow \frac{1}{2}dt = xdx$; se $x = 0 \Rightarrow t = 1$; se $x = 5 \Rightarrow t = 26$;

$$\int_0^5 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{26}\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}[\log(t)]_1^{26} = \frac{1}{2}(\log 26 - \log 1) = \frac{1}{2}\log 26$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^1 \log^2 x\,dx$$

poichè

$$\int \log^2 x\,dx = x\log^2 x - \int x\frac{2\log x}{x}\,dx = x\log^2 x - 2\int \log x\,dx = x\log^2 x - 2\left(x\log x - \int \frac{x}{x}\,dx\right) =$$

$$= x\log^2 x - 2\left(x\log x - \int dx\right) = x\log^2 x - 2(x\log x - x) + c = x(\log^2 x - 2\log x + 2) + c$$

da cui, a causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_0^1 \log^2 x\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \log^2 x\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}[x(\log^2 x - 2\log x + 2)]_\epsilon^1 =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} 1(\log^2 1 - 2\log 1 + 2) - \epsilon(\log^2\epsilon - 2\log\epsilon + 2) = 2 - \lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon\log^2\epsilon - 2\epsilon\log\epsilon + 2\epsilon = 2$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n x^n$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica avendo posto $x = 1$).

Applicando il criterio della radice si ottiene $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{1}{3}$ da cui

$R = 3$ e poiché $c = 0$ ne consegue che $(-3,3)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n 3^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ che diverge in quanto $a_n \to e^3$ non è infinitesimo

Se $x = -3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n 3^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ è indefinita

(caso $x = 1$)

$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$ converge, si vede tramite il criterio della radice $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=\frac{1}{3}<1$

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato su $x = 1$, della seguente funzione:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(1) = 0$

$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'(1) = 4$

$f''(x) = 2 - \frac{6}{x^4} \Rightarrow f''(1) = -4$

$f'''(x) = \frac{24}{x^5} \Rightarrow f'''(1) = 24$

E il polinomio risultante è: $P^3(x) = 4(x-1) - \frac{4(x-1)^2}{2!} + \frac{24(x-1)^3}{3!} =$

$= 4(x-1) - 2(x-1)^2 + 4(x-1)^3$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Trovare, se esiste, l'inversa della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Anno in corso)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_3}{4}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

(Anni precedenti)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 0 - 0 + 2 - 0 = 8 \ \neq 0 \text{ è invertibile}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui l'inversa della matrice è:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$