MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   I SESSIONE III APPELLO, 2015/16

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

C.E. $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, la funzione è pari dato che $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = f(x)$, la studio in$[1, +\infty)$. Inoltre $f(1) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty;\ m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = 1;$$

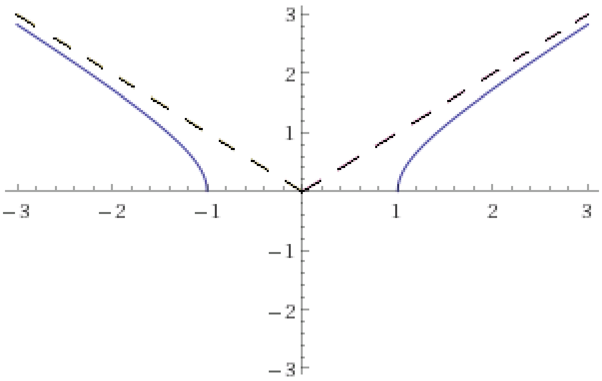
$$q = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0, \text{asintoto obliquo } y = x$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, x \in (1, +\infty)$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x > 0 \cap (1, +\infty) \Rightarrow x > 1$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \text{ in } x = 1 \text{ si evidenzia una tangenza verticale dx}$$

non c'è bisogno di studiare la derivata seconda data la simmetria e il limite della derivata prima all'estremo.



2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to3^+} \frac{\log(x-3)}{\log(x^2-9)}$$

$$\lim_{x\to3^+} \frac{\log(x-3)}{\log(x^2-9)} \overset{H}{=} \lim_{x\to3^+} \frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{2x}{x^2-9}} = \lim_{x\to3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{2x(x-3)} = \lim_{x\to3^+} \frac{x+3}{2x} = \frac{6}{6} = 1$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\log(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ x}{x\frac{1}{x}\log\left(1+x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}}=1\frac{1}{\log e}=1$$

4) Determinare $k\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} e^{kx} & \text{se } x<1 \\ e^{k^2x} & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

$$f(1)=e^{k^2}=\lim_{x\to 1^-}e^{kx}=e^k\Rightarrow e^{k^2}=e^k\Rightarrow k^2=k\Rightarrow k^2-k=0\Rightarrow k(k-1)=0\Rightarrow k=0\ \vee k=1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=e^{3x-x^2}$$

nell'intervallo [0, 3].

$f(x)$ è continua in $[0,3]$, inoltre $f(0)=1=f(3)$

$f'(x)=(3-2x)e^{3x-x^2}$ evidentemente derivabile in $(0,3)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$f'(x)=0\Rightarrow 3-2x=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^{-x}}{e^x+1}dx \qquad (suggerimento: porre\ e^{-x}=t)$$

Ponendo $e^{-x}=t \Rightarrow -e^{-x}dx=dt \Rightarrow dx=-\frac{dt}{e^{-x}}=-\frac{dt}{t}$ inoltre $e^x=\frac{1}{t}$

si ha che $x=\log 2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$ e $x=0 \Rightarrow t=1$

$$\int \frac{e^{-x}}{e^x+1}dx=-\int \frac{t}{\frac{1}{t}+1}\frac{dt}{t}=-\int \frac{t}{t+1}dt=-t\log|t+1|+\int \log|t+1|\,dt=$$

$$=-t\log|t+1|+(t+1)\log|t+1|-\int \frac{t+1}{t+1}dt=\log|t+1|-\int dt=\log|t+1|-t+c$$

da cui

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^{-x}}{e^x+1}dx=[\log|t+1|-t]_1^{\frac{1}{2}}=\log\left|\frac{1}{2}+1\right|-\frac{1}{2}-\log 2+1=\log\frac{3}{2}-\log 2+\frac{1}{2}=\log\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Poichè $\frac{d}{dx}e^{-\frac{x^2}{2}}=-xe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\int -xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=-e^{-\frac{x^2}{2}}+c$ da cui si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\lim_{h\to+\infty}\int_0^h xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\lim_{h\to+\infty}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^h=\lim_{h\to+\infty}-e^{-\frac{h^2}{2}}+e^{-\frac{0}{2}}=1$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica avendo fissato $x = 2$).

Criterio del rapporto: $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ da cui $R = +\infty$

La serie, centrata in $c = 0$, ha come l'intervallo di convergenza tutto l'asse dei numeri reali.

(caso $x = 2$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n!}$$

Analizziamo il termine generale della serie, per il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^{2n+2}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^{2n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} 4 = 0 \text{ converge}$$

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato su $x = 1$, della seguente funzione:

$$f(x) = e^x + \log x$$

$f(x) = e^x + \log x \Rightarrow f(1) = e$

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = e + 1$

$f''(x) = e^x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = e - 1$

$f'''(x) = e^x + \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = e + 2$

E il polinomio risultante è: $P^3(x) = e + (e+1)(x-1) + (e-1)\frac{(x-1)^2}{2!} + (e+2)\frac{(x-1)^3}{3!}$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Studiare il seguente sistema lineare, trovando, se esistono le soluzioni:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+y+4z=0 \\ 4x+3y+7z=1 \end{cases}$$

(Anno in corso)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{R_3}{-5}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ da cui si evince

che vi sono ∞^1 soluzioni ossia $\begin{cases} x+2y=1-3z \\ y=\frac{3}{5}-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{6}{5}-2z=1-3z \\ y=\frac{3}{5}-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5}-z \\ y=\frac{3}{5}-z \end{cases}$

$\Rightarrow$ soluzione $\left(-\frac{1}{5}-\mathrm{t},\frac{3}{5}-\mathrm{t},\mathrm{t}\right), \mathrm{t}\in\mathbb{R}$

(Anni precedenti)

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 7+32+27-12-12-42=0$ evidentemente con rango pari a 2.

Orliamo il minore $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6=-5$ con i termini noti e la terza riga:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+9-4-0-6=10$ e quindi il rango del sistema è 2,

il sistema diventa $\begin{cases} x+2y=1-3z \\ 3x+y=-4z \end{cases}$ e ha soluzione

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-3z & 2 \\ -4z & 1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{1-3z+8z}{-5}=-\frac{1}{5}-z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-3z \\ 3 & -4z \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-4z-3+9z}{-5}=\frac{3}{5}-z$$

$z\in\mathbb{R}$

Riportare solo i passaggi essenziali