MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   I SESSIONE III APPELLO, 2015/16

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA B

I PARTE

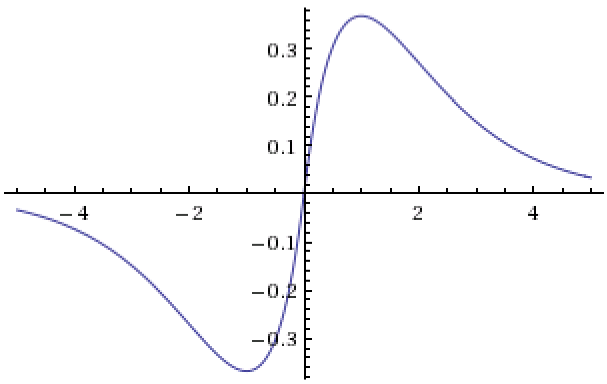
1) Studiare la funzione: $f(x) = xe^{-|x|}$

C.E. $x \in \mathbb{R}$, la funzione è dispari: la studiamo in $[0, +\infty)$ e in tale intervallo vale $f(x) = xe^{-x}$ inoltre

$$f(0) = 0; \lim_{x\to+\infty} x\, e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ asintoto oriz. dx}$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x), x \in [0, +\infty)$$

$f'(x) \geq 0$ per $1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow f(x)$ cresce in $(0, 1)$ e decresce in $(1, +\infty)$,
ha massimo in $\max\left(1, \frac{1}{e}\right)$. Dato l'asintoto orizzontale non è necessario studiare la derivata seconda



2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos\ x}}{2} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{2\cos\ x} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2x}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{4x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{4x^2}} = -\infty$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \log(kx) & \text{se } x > 1 \\ x & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 1 = \lim_{x\to1^+} \log(kx) = \log(k) \Rightarrow \log(k) = 1 \Rightarrow k = e$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = 2 + \sqrt{4-x^2}$$

nell'intervallo [-2, 2].

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -4 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$f(x)$ è continua in $[-2, 2]$ e inoltre $f(-2) = f(2) = 2$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \text{ derivabile in } (-2,2)$$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito (usare l'adeguata sostituzione cambiando anche gli estremi di integrazione):

$$\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^2}dx$$

poniamo $t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2xdx$; se $x = 0 \Rightarrow t = 1$; se $x = 1 \Rightarrow t = 0$

$$\int x\sqrt[3]{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int -2x\sqrt[3]{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{t}\,dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = -\frac{3}{8}t\sqrt[3]{t} + c$$

da cui si ottiene $\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^2}dx = -\frac{3}{8}[t\sqrt[3]{t}]_1^0 = -\frac{3}{8}(-1) = \frac{3}{8}$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty}(x-2)e^{-x}dx$$

poichè

$$\int (x-2)e^{-x}dx = \int xe^{-x}dx - 2\int e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx - 2\int e^{-x}dx =$$

$$= -xe^{-x} - \int e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} + e^{-x} + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_0^{+\infty}(x-2)e^{-x}dx = \lim_{h\to+\infty}\int_0^h (x-2)e^{-x}dx = \lim_{h\to+\infty}[-xe^{-x} + e^{-x}]_0^h =$$

$$= \lim_{h\to+\infty} -he^{-h} + e^{-h} + 0 - 1 = -1 + \lim_{h\to+\infty} -\frac{h}{e^h} + \frac{1}{e^h} = -1 + 0 - 0 = -1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica avendo posto $x = \frac{7}{3}$).

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 1$ da cui $R = 1$ e poiché

$c = 2$ ne consegue che $(1, 3)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ che converge in virtù di Leibniz

Se $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ che converge perchè serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$

da cui, l'intervallo di convergenza è [1, 3].

(caso $x = \frac{7}{3}$)

la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n n^3}$ per il criterio della radice $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{3} < 1$ converge

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 2$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log{(x^2 - 2)}$$

$f(x) = \log{(x^2 - 2)} \Rightarrow f(2) = \log 2$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 2} \Rightarrow f'(2) = 2$

$f''(x) = \frac{2(x^2-2) - 2x2x}{(x^2-2)^2} = \frac{2x^2 - 4 - 4x^2}{(x^2-2)^2} = \frac{-2x^2 - 4}{(x^2-2)^2} \Rightarrow f''(2) = -\frac{12}{4} = -3$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = \log 2 + 2(x-2) - \frac{3(x-2)^2}{2!}$

10) Studiare il seguente sistema lineare, trovando, se esistono le soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + y + 4z = 0 \\ 4x + 3y + 7z = 1 \end{cases}$$

(Anno in corso)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 2 \end{array}\right) \text{da cui si evince che esiste}$$

$$\text{un'unica soluzione ossia} \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -y + z = -1 \\ -10z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - \dfrac{3}{5} = 1 \\ -y - \dfrac{1}{5} = -1 \\ z = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = \dfrac{8}{5} \\ y = \dfrac{4}{5} \\ z = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{8}{5} = \dfrac{8}{5} \\ y = \dfrac{4}{5} \\ z = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{4}{5} \\ z = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{soluzione} \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

(Anni precedenti)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 32 + 9 - 12 - 12 - 14 = 10 \text{ evidentemente il sistema ha rango 3 con soluzione}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{10} = \frac{7 + 8 + 0 - 3 - 12 - 0}{10} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{10} = \frac{0 + 16 + 3 - 0 - 4 - 7}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{1 + 0 + 3 - 4 - 0 - 2}{10} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$$