MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   I SESSIONE III APPELLO, 2015/16

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA C

I PARTE

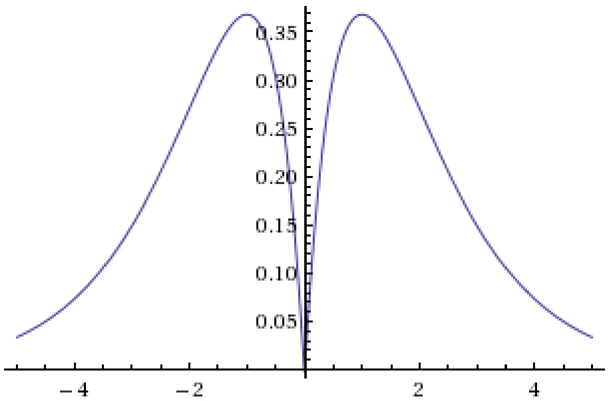
1) Studiare la funzione: $f(x) = |x|e^{-|x|}$

C.E. $x \in \mathbb{R}$, la funzione è pari: la studiamo in $[0, +\infty)$ e in tale intervallo vale $f(x) = xe^{-x}$ inoltre

$$f(0) = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ asintoto oriz. dx}$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x), x \in [0, +\infty)$$

$f'(x) \geq 0$ per $1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow f(x)$ cresce in $(0, 1)$ e decresce in $(1, +\infty)$,
ha massimo in $\max\left(1, \frac{1}{e}\right)$. Dato l'asintoto orizzontale non è necessario studiare la derivata seconda



2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\sin(x + \frac{\pi}{2})\right)}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\sin(x + \frac{\pi}{2})\right)}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{0}{2} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \sqrt{2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \sqrt{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 2x}{\sqrt{x} + \sqrt{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x} + \sqrt{2x}} = -\infty$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \log(kx) & \text{se } x > 1 \\ 2x & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 2 = \lim_{x\to 1^+} \log(kx) = \log(k) \Rightarrow \log(k) = 2 \Rightarrow k = e^2$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

nell'intervallo [-2, 2].

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -4 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$f(x)$ è continua in $[-2, 2]$ e inoltre $f(-2) = f(2) = 0$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \text{ derivabile in } (-2,2)$$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito (usare l'adeguata sostituzione cambiando anche gli estremi di integrazione):

$$\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}dx$$

poniamo $t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2xdx$; se $x = -1 \Rightarrow t = 0$; se $x = 0 \Rightarrow t = 1$

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int -2x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{t\sqrt{t}}{3} + c$$

da cui si ottiene $\int_{-1}^{1} x\sqrt[3]{1-x^2}dx = -\frac{1}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}(1-0) = -\frac{1}{3}$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{0}^{+\infty} (x+2)e^{-x}dx$$

poichè

$$\int (x+2)e^{-x}dx = \int xe^{-x}dx + 2\int e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx + 2\int e^{-x}dx =$$

$$= -xe^{-x} + 3\int e^{-x}dx = -xe^{-x} - 3e^{-x} + c = -e^{-x}(x+3)$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_{0}^{+\infty} (x+2)e^{-x}dx = \lim_{h\to+\infty}\int_{0}^{h} (x+2)e^{-x}dx = \lim_{h\to+\infty}[-e^{-x}(x+3)]_0^h =$$

$$= \lim_{h\to+\infty} -e^{-h}(h+3) + 3 = 3 + \lim_{h\to+\infty} -\frac{h+3}{e^h} = 3 - 0 = 3$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{n^3}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica avendo posto $x = -1$).

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 1$ da cui $R = 1$ e poiché

$c = -2$ ne consegue che $(-3, -1)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = -3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ che converge in virtù di Leibniz

Se $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ che converge perchè serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$

da cui, l'intervallo di convergenza è [-3, -1].

(caso $x = -1$)

la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ che converge essendo la serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 3$, della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow f(3) = \sqrt{5}$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \Rightarrow f'(3) = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4} - x\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 4 - x^2}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{-4}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}} \Rightarrow f''(3) = -\frac{4}{5\sqrt{5}}$$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = \sqrt{5} + \frac{3}{\sqrt{5}}(x - 3) - \frac{2}{5\sqrt{5}}(x - 3)^2$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Studiare il seguente sistema lineare, trovando, se esistono le soluzioni:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+y+4z=0 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$

(Anno in corso)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \text{da cui si evince che esiste}$$

$$\text{un'unica soluzione ossia} \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -y+z=-1 \\ -2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-\frac{3}{2}=1 \\ -y-\frac{1}{2}=-1 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{soluzione} \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

(Anni precedenti)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+8+3-3-4-4=2 \text{ evidentemente il sistema ha rango 3 con soluzione}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2}=\frac{2+8+0-3-4-0}{2}=\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2}=\frac{0+4+3-0-4-2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{1+0+1-1-0-2}{2}=-\frac{1}{2}$$