MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   I SESSIONE III APPELLO, 2015/16

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA D

I PARTE

1) Studiare la funzione: $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

C.E. $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, la funzione è pari dato che $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = f(x)$, la studio in$[2, +\infty)$. Inoltre $f(2) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty;\ m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} = 1;$

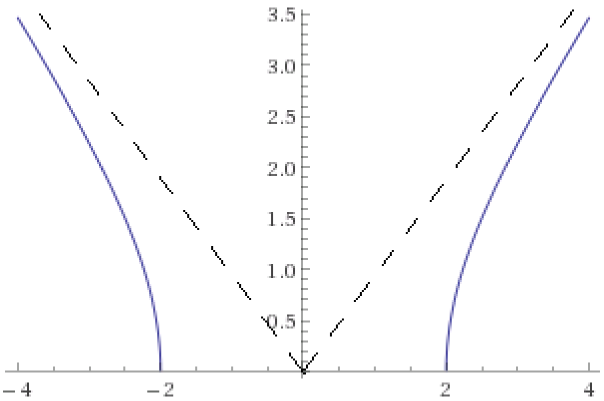
$q = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0,$ asintoto obliquo $y = x$

$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}, x \in (2, +\infty)$

$f'(x) > 0 \Rightarrow x > 0 \cap (2, +\infty) \Rightarrow x > 2$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty$ in $x = 2$ si evidenzia una tangenza verticale dx

non c'è bisogno di studiare la derivata seconda data la simmetria e il limite della derivata prima all'estremo.



2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\log(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\log(1+x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0} (1+x)\cos x = 1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{se } x < 1 \\ k^2 x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = k^2 = \lim_{x\to 1^-} kx = k \Rightarrow k^2 = k \Rightarrow k^2 - k = 0 \Rightarrow k(k-1) = 0 \Rightarrow k = 0 \ \vee k = 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = e^{x^2-3x}$$

nell'intervallo [0, 3].

$f(x)$ è continua in $[0,3]$,   inoltre $f(0) = 1 = f(3)$

$f'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x}$ evidentemente derivabile in $(0,3)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

Ponendo $e^x + 1 = t \Rightarrow e^x dx = dt$

si ha che $x = \log 2 \Rightarrow t = 3$ e $x = 0 \Rightarrow t = 2$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c$$

da cui

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = [\log|t|]_2^3 = \log 3 - \log 2 = \log\frac{3}{2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$$

Poichè $\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2} \Rightarrow \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$ da cui si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{h\to+\infty}\int_0^h xe^{-x^2}\,dx = \lim_{h\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^h = \lim_{h\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{-h^2} + \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica avendo fissato $x = \frac{1}{2}$).

Criterio del rapporto: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ da cui $R = +\infty$

La serie, centrata in $c = 0$, ha come intervallo di convergenza tutto l'asse dei numeri reali.

(caso $x = \frac{1}{2}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!}$$

Per il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0 \text{ converge}$$

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato su $x = 1$, della seguente funzione:

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

$f(x) = e^x + \frac{1}{x} \Rightarrow f(1) = e + 1$

$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1) = e - 1$

$f''(x) = e^x + \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1) = e + 2$

$f'''(x) = e^x - \frac{6}{x^4} \Rightarrow f'''(1) = e - 6$

E il polinomio risultante è: $P^3(x) = (e+1) + (e-1)(x-1) + (e+2)\frac{(x-1)^2}{2!} + (e-6)\frac{(x-1)^3}{3!}$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Studiare il seguente sistema lineare, trovando, se esistono le soluzioni:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+y+4z=0 \\ x+3y+7z=1 \end{cases}$$

(Anno in corso)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{\frac{R_3}{5} \\ \frac{R_2}{-1}}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \text{da cui si evince}$$

$$\text{che l'unica soluzioneè data da} \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y-z=1 \\ z=-\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=\frac{8}{5} \\ y=\frac{4}{5} \\ z=-\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{4}{5} \\ z=-\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{soluzione } \left(0,\frac{4}{5},-\frac{1}{5}\right)$$

(Anni precedenti)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 7+8+9-3-12-14=-5 \text{ evidentemente con rango pari a 3, rango del sistema.}$$

Le soluzioni sono date da:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{7+8+0-3-12-0}{-5}=0$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{0+4+3-0-4-7}{-5}=\frac{4}{5}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{1+0+3-1-0-2}{-5}=-\frac{1}{5}$$