MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) SESSIONE ESTIVA 2015/16

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

---

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

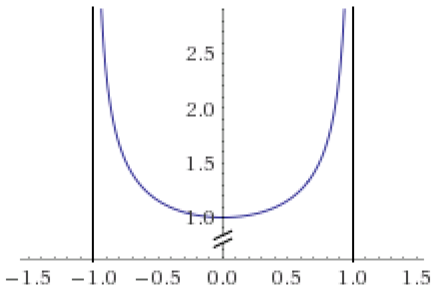
C.E. $1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1,1)$, la funzione è pari dato che $f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$, la studio in$[0,1)$. Inoltre $f(0) = 1$ e la funzione è sempre non negativa.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(1-x)}_{\to 0^+}\underbrace{(1+x)}_{\to 2}}} = +\infty \text{ asintoto verticale sx}$$

$$f'(x) = D\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}(-2x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, x \in [0,1)$$

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$

non c'è bisogno di studiare la derivata seconda data la simmetria.



2) Calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \log x}{2x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \log x}{2x+1} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+8}}{7-2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+8}}{\underbrace{7-2x}_{<0}} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+8}}{2x-7} = -\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+8}{(2x-7)^2}} = -\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+8}{4x^2-28x+49}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \log(kx) & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = \log\, k = \lim_{x\to 1^-} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \log\, k = 0 \Rightarrow k = 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = x|x|$$

nell'intervallo [1, 2].

$f(x)$ è continua in $[1,2]$, inoltre in $[1,2]$ $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$ evidentemente derivabile in $(1,2)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{4-1}{2-1} = 2\text{c} \Rightarrow 3 = 2\text{c} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$$

Ponendo $e^x + 2 = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$$\int \frac{e^x}{e^x+2}dx = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + c = \log|e^x+2| + c = \log(e^x+2) + c$$

da cui

$$\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+2}dx = [\log(e^x+2)]_0^2 = \log(\mathrm{e}^2+2) - \log 3 = \log\left(\frac{e^2+2}{3}\right)$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

Poichè $\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2} \Rightarrow \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$ da cui si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{h\to+\infty}\int_0^h xe^{-x^2}dx = \lim_{h\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^h = \lim_{h\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{-h^2} + \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2^n+3^n)x^n$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica avendo fissato $x=\frac{1}{4}$)

Analizziamo il termine generale della serie, per il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}=\lim_{n\to+\infty}3\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=3 \text{ converge}$$

$$R=\frac{1}{3}\ e\ c=0\ \text{ quindi l'intervallo di convergenza è} -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$$

Vediamo se converge agli estremi:

$$x=\frac{1}{3}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}(2^n+3^n)\frac{1}{3^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right) \text{ il cui termine gen. converge ad 1 ossia la serie diverge}$$

$$x=-\frac{1}{3}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}(2^n+3^n)\frac{(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right) \text{ indeterminata}$$

(anni precedenti)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2^n+3^n)\left(\frac{1}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

uso il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{4}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=\frac{3}{4}<1\Rightarrow \text{converge}$$

9) Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 2 della seguente funzione:

$$f(x)=x^2+2$$

$f(x)=x^2+2\Rightarrow f(0)=2$

$f'(x)=2x\Rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=2\Rightarrow f''(0)=2$

E il polinomio risultante è: $P^2(x)=2+0x+\frac{2x^2}{2!}=2+x^2$

come atteso il polinomio di McLaurin è identico alla $f(x)$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Studiare il seguente sistema lineare, trovando, se esistono le soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + y + 4z = 1 \\ 4x + 3y + 7z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\widetilde{r_2}=r_2-3r_1 \\ \widetilde{r_3}=r_3-4r_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\widetilde{r_3}=r_3-r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \text{ sistema inconsistente}$$

(per gli anni precedenti)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 32 + 27 - 12 - 12 - 42 = 0 \text{ evidentemente con rango pari a 2.}$$

Consideriamo il minore $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$ e orliamolo con i termini noti e la terza riga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + 9 - 4 - 3 - 6 = 5 \neq 0 \text{ e quindi il sistema è inconsistente}$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>