MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II SESSIONE ESTIVA 2015/16

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \log(x^2 - 4)$$

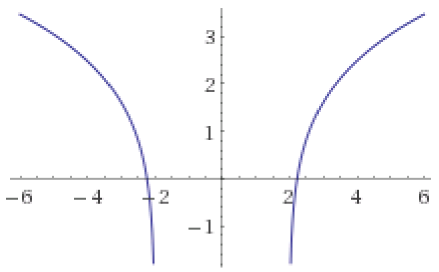
C.E. $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, la funzione è pari dato che $f(-x) = f(x)$, la studio in $(2, +\infty)$.

$\lim_{x\to 2^+} \log(x^2 - 4) = -\infty$ asintoto verticale dx

$\lim_{x\to +\infty} \log(x^2 - 4) = +\infty$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^2-4)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-4}}{1} = 0$ No as. obliquo

$f'(x) = \frac{2x}{x^2-4} \geq 0$, per $x \geq 0 \cap x > 2 \Rightarrow x \in (2, +\infty)$ è crescente

$f''(x) = \frac{2(x^2-4) - 2x(2x)}{(x^2-4)^2} = -\frac{2x^2+8}{(x^2-4)^2} \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 8 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq -4$ mai vera, il che vuol dire che la funzione in $(2, +\infty)$ rivolge la concavità verso il basso.



(x from −6 to 6)

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital,:

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(\frac{1}{x} + \log x\right)$$

$\lim_{x\to 0^+} x\left(\frac{1}{x} + \log x\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x}\left(1 + \frac{\log x}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(1 + \frac{\log x}{\frac{1}{x}}\right) = 1$ poiché

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+3}{x}\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}=\lim_{x\to 0}\frac{x+9-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

4) Determinare $k\in\mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} e^{k+x} & \text{se } x\geq 0\\ x^2+e & \text{se } x<0\end{cases}$$

$$f(1)=e^k=\lim_{x\to 0^-}x^2+e=e\Rightarrow e^k=e\Rightarrow k=1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

nell'intervallo [1, 4].

$f(x)$ è continua in $[1,4]$ derivabile in $(1,4)$ con derivata

$f(1)=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5};\ \ f(4)=\frac{4}{16+4}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$; quindi $f(1)=f(4)$

$f'(x)=\frac{(x^2+4)-x(2x)}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}=0$ se $f'(x)=0\Rightarrow 4-x^2=0\Rightarrow x^2=4$

che fornisce le seguenti soluzioni:

$x_1=-2$ non accettabile e $x_2=2$ accettabile

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

II PARTE

6) Ricordando che $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

da cui

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx = \left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \arcsin 1 + 0 - 0 - \sqrt{1} = \frac{\pi}{2} - 1$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int x^{-1} x^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad \text{da cui si ottiene:}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \lim_{h\to+\infty} \int_0^h \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \lim_{h\to+\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_0^h = \lim_{h\to+\infty} -\frac{2}{\sqrt{h}} + 2 = 2$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n x^n$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica avendo fissato $x = 1$)

Analizziamo il termine generale della serie, per il criterio della radice:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0 \text{ converge}$$

$R = \infty$ e $c = 0$ quindi l'intervallo di convergenza è tutto l'asse reale

(anni precedenti)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$$

uso il criterio della radice:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0 < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 della seguente funzione nel punto $x_0 = 1$:

$$f(x) = \log 3x$$

$f(x) = \log 3x \Rightarrow f(1) = \log 3$

$f'(x) = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = \log 3 + (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2!} = \log 3 + (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2}$

10) Studiare il seguente sistema lineare omogeneo, trovando, le soluzioni:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 3x+y+4z=0 \\ 4x+3y+7z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\widetilde{r_2}=r_2-3r_1 \\ \widetilde{r_3}=r_3-4r_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\widetilde{r_3}=r_3-r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ sistema di grado 2}$$

da cui

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -5\,y-5\,z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+\,z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2z+3z=0 \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow$$

ammette soluzione $(-k,-k,k)$ con $k \in \mathbb{R}$

(per gli anni precedenti)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 7+32+27-12-12-42=0 \text{ evidentemente con rango} < 3.$$

Consideriamo il minore $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6=-5$ il sistema lineare omogeneo ha rango 2:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 3x+y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=-3z \\ 3x+y=-4z \end{cases} \Rightarrow$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -3z & 2 \\ -4z & 1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-3z+8z}{-5}=\frac{5z}{-5}=-z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3z \\ 3 & -4z \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-4z+9z}{-5}=\frac{5z}{-5}=-z$$

da cui la soluzione $(-k,-k,k)$ con $k \in \mathbb{R}$