MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina)   III SESSIONE ESTIVA 2015/16

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA A

I PARTE

---

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x-4}}$$

C.E. $x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4 \Rightarrow x \in (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$, la funzione non ha simmetrie.

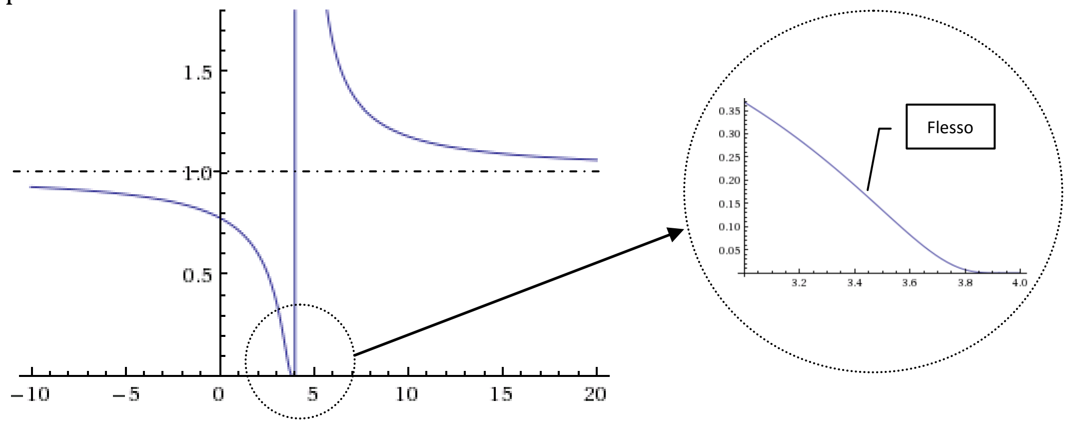
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-4}} = 1$ As. orizzontale sx

$\lim\limits_{x\to4^-} e^{\frac{1}{x-4}} = 0$; $\lim\limits_{x\to4^+} e^{\frac{1}{x-4}} = +\infty$ asintoto verticale dx

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-4}} = 1$ As. orizzontale dx

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x-4)^2} e^{\frac{1}{x-4}}$ che evidentemente è decrescente *in tutto il suo dominio*

$\lim\limits_{x\to4^-} -\dfrac{1}{(x-4)^2} e^{\frac{1}{x-4}} = \lim\limits_{x\to4^-} -\dfrac{\frac{1}{(x-4)^2}}{e^{-\frac{1}{x-4}}} = 0$ e poiché $f(x)$ proviene dall'asintoto obliquo è presente un flesso.



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{2}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{2}}{x-2} \overset{H}{=} \lim_{x\to2} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{2}}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}}{1} = \frac{1}{5\sqrt[5]{16}}$$

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} e^{kx} & \text{se } x \geq 1 \\ \log 4 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$f(1)=e^{k}=\lim_{x\to 1^{-}}\log 4=\log 4 \Rightarrow e^{k}=\log 4 \Rightarrow k=\log\log 4$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=|x^3|$$

nell'intervallo [-1,1].

$f(x)$ è continua in $[-1,1]$ ed è derivabile in $(-1,1)$ dato che $f'(x)=\frac{|x^3|}{x^3}3x^2=3\frac{x^2|x|}{x^3}x^2=3x|x|$

e che $\lim_{x\to 0^{\pm}} 3x|x|=0$

$f(-1)=1;\;\; f(1)=1;$ quindi $f(-1)=f(1)$ da cui

$f'(x)=0$ se $x=0$ che è la soluzione cercata

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Ricordando che $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$, calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \arctan x \, dx$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$ da cui

$$\int_0^1 \arctan x \, dx = \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_0^1 =$$

$$= 1 \arctan 1 - \frac{1}{2} \log(1+1) - \; 0 \arctan 0 - \frac{1}{2} \log 2 = \frac{\pi}{4} - \log \sqrt{2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{x} + c$ da cui si ottiene:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{h \to +\infty} \int_1^h \frac{1}{x^2} dx = \lim_{h \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^h = \lim_{h \to +\infty} -\frac{1}{h} + 1 = 1$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(x+2)^n}{2^n+1}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica avendo fissato $x = 0$)

Il centro della serie è c = -2. Analizziamo il termine generale della serie, con il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{n}{1+\frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{2} \text{ converge con } R = 2 \; e \; c = -2$$

quindi l'intervallo di convergenza è tutto $(-4, 0)$. Agli estremi non converge dato che per

$$x = 0) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{2^n+1} \text{ ha termine generale divergente } \frac{n2^n}{2^n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

$$x = -4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^n 2^n}{2^n+1} \text{ ha termine generale divergente } \frac{n(-1)^n 2^n}{2^n+1} \text{ indeterminato}$$

(anni precedenti)

Basta controllare il caso $x = 0$ della serie di potenze.

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 della seguente funzione nel punto $x_0 = 1$:

$$f(x) = e^{x^2}$$

$f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f(1) = e$

$f'(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow f'(1) = 2e$

$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} = e^{x^2}(2 + 4x^2) \Rightarrow f''(1) = 6e$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = e + 2e(x-1) - \dfrac{6e(x-1)^2}{2!} = e + 2e(x-1) - 3e(x-1)^2$

10) Studiare il seguente sistema lineare omogeneo, trovando, le soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \\ 4x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\widetilde{r_2}=r_2-3r_1 \\ \widetilde{r_3}=r_3-4r_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\widetilde{r_3}=r_3-r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$$ sistema omogeneo di grado 3

da cui

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -5\,y - 5\,z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

(per gli anni precedenti)

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 32 + 27 - 12 - 12 - 12 = 61 - 36 = 25$ evidentemente con rango 3 che

ammette unica soluzione $x = y = z = 0$.

Riportare solo i passaggi essenziali