MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I - SESSIONE AUTUNNALE 2015/16

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

C.E. $x \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, la funzione non ha simmetrie.

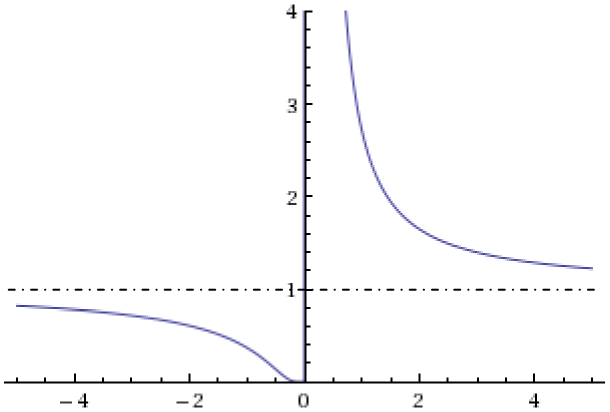
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ As. orizzontale sx

$\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$; $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ asintoto verticale dx

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ As. orizzontale dx

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ che evidentemente è decrescente *in tutto il suo dominio*

$\lim\limits_{x\to0^-} -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0^-} -\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}} = 0$ e poiché $f(x)$ proviene dall'asintoto orizzontale è presente un flesso.



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{x}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{x}}{x-2} \overset{H}{=} \lim_{x\to2} \frac{\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{x}}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{-\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}}{1} = -\frac{1}{5\sqrt[5]{16}}$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)} = \frac{1}{4}$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua in $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 1 \\ \log k & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f(1) = e = \lim_{x\to 1^-} \log k = \log k \Rightarrow e = \log k \Rightarrow k = e^e$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = |x^2|$$

nell'intervallo [-1,1].

$f(x)$ è continua in $[-1,1]$ ed è derivabile in $(-1,1)$ dato che $f'(x) = \frac{|x^2|}{x^2} 2x = 2x$

e che $\lim_{x\to 0^\pm} 2x = 0$

$f(-1) = 1$; $f(1) = 1$; quindi $f(-1) = f(1)$ da cui

$f'(x) = 0$ se $x = 0$ che è la soluzione cercata

Riportare solo i passaggi essenziali

6) Ricordando che $D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \arccos x\, dx$$

$$\int \arccos x\, dx = x \arccos x - \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arccos x - \int -\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$ da cui

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[x \arccos x - \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1 \arccos 1 - \sqrt{1-1} - 0 \arccos 0 + \sqrt{1-0} = 1 \cdot 0 + 1 = 1$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^e} dx$$

$\int \frac{1}{x^e} dx = \int x^{-e} dx = \frac{x^{1-e}}{1-e} + c$ da cui si ottiene:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^e} dx = \lim_{h \to +\infty} \int_1^h \frac{1}{x^e} dx = \lim_{h \to +\infty} \left[\frac{x^{1-e}}{1-e}\right]_1^h = \lim_{h \to +\infty} \frac{h^{\overbrace{1-e}^{<0}}}{1-e} - \frac{1^{1-e}}{1-e} = -\frac{1}{1-e}$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(x+2)^n}{2^n+1}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica avendo fissato $x = 0$)

Il centro della serie è c = -2. Analizziamo il termine generale della serie, con il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{n}{1+\frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{2} \text{ converge con } R = 2 \; e \; c = -2$$

quindi l'intervallo di convergenza è tutto $(-4, 0)$. Agli estremi non converge dato che per

$x = 0)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{2^n+1}$ ha termine generale divergente $\displaystyle\frac{n2^n}{2^n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$

$x = -4)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^n 2^n}{2^n+1}$ ha termine generale divergente $\displaystyle\frac{n(-1)^n 2^n}{2^n+1}$ indeterminato

(anni precedenti)

Basta controllare il caso $x = 0$ della serie di potenze.

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 della seguente funzione nel punto $x_0 = 1$:

$$f(x) = \log x^2$$

$f(x) = \log x^2 \Rightarrow f(1) = 0$

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \Rightarrow f'(1) = 2$

$f''(x) = -\dfrac{2}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -2$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = 2(x-1) - \dfrac{2(x-1)^2}{2!} = 2(x-1) - (x-1)^2$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

10) Studiare il seguente sistema lineare omogeneo, trovando, le soluzioni:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 3x+y+4z=0 \\ 4x+3y+2z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\widetilde{r_2}=r_2-3r_1 \\ \widetilde{r_3}=r_3-4r_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\widetilde{r_3}=r_3-r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \text{ sistema omogeneo di grado 3}$$

da cui

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -5\,y-5\,z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

(per gli anni precedenti)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2+32+27-12-12-12=61-36=25 \text{ evidentemente con rango 3 che}$$

ammette unica soluzione $x=y=z=0$.

Riportare solo i passaggi essenziali