MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II - SESSIONE AUTUNNALE 2015/16

MATR.___________ COGNOME_______________ NOME________________

**TEMA A**

**I PARTE**

---

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \log(x^2 - 4)$$

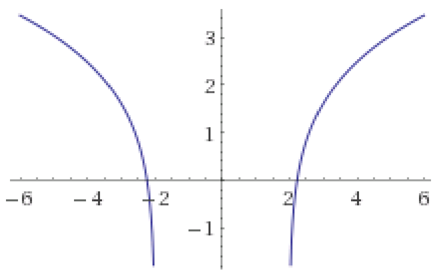
C.E. $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, la funzione è pari dato che $f(-x) = f(x)$, la studio in $(2, +\infty)$.

$\lim_{x \to 2^+} \log(x^2 - 4) = -\infty$ asintoto verticale dx

$\lim_{x \to +\infty} \log(x^2 - 4) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x^2 - 4)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 4}}{1} = 0$ No as. obliquo

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} \geq 0$, per $x \geq 0 \ \cap x > 2 \Rightarrow x \in (2, +\infty)$ è crescente

$f''(x) = \frac{2(x^2 - 4) - 2x(2x)}{(x^2 - 4)^2} = -\frac{2x^2 + 8}{(x^2 - 4)^2} \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 8 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq -4$ mai vera, il che vuol dire che la funzione in $(2, +\infty)$ rivolge la concavità verso il basso.




($x$ from −6 to 6)

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \log x}{2x + 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \log x}{2x + 1} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2}$$

---



__Riportare solo i passaggi essenziali__

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)}=\frac{1}{4}$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} e^{kx} & \text{se } x<1 \\ e^{k^2x} & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

$$f(1)=e^{k^2}=\lim_{x\to 1^-}e^{kx}=e^k \Rightarrow e^{k^2}=e^k \Rightarrow k^2=k \Rightarrow k^2-k=0 \Rightarrow k(k-1)=0 \Rightarrow k=0 \ \vee k=1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=e^{x^2-3x}$$

nell'intervallo [0, 3].

$f(x)$ è continua in $[0,3]$, inoltre $f(0)=1=f(3)$

$f'(x)=(2x-3)e^{x^2-3x}$ evidentemente derivabile in $(0,3)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$



**Riportare solo i passaggi essenziali**

## II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

Ponendo $e^x + 1 = t \Rightarrow e^x dx = dt$

si ha che $x = \log 2 \Rightarrow t = 3$ e $x = 0 \Rightarrow t = 2$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c$$

da cui

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = [\log|t|]_2^3 = \log 3 - \log 2 = \log\frac{3}{2}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} (x+2)e^{-x}\,dx$$

poichè

$$\int (x+2)e^{-x}dx = \int xe^{-x}dx + 2\int e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx + 2\int e^{-x}dx =$$

$$= -xe^{-x} + 3\int e^{-x}dx = -xe^{-x} - 3e^{-x} + c = -e^{-x}(x+3)$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_0^{+\infty} (x+2)e^{-x}dx = \lim_{h\to+\infty} \int_0^h (x+2)e^{-x}dx = \lim_{h\to+\infty} [-e^{-x}(x+3)]_0^h =$$

$$= \lim_{h\to+\infty} -e^{-h}(h+3) + 3 = 3 + \lim_{h\to+\infty} -\frac{h+3}{e^h} = 3 - 0 = 3$$



**Riportare solo i passaggi essenziali**

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare la serie numerica avendo posto $x = \frac{7}{3}$).

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 1$ da cui $R = 1$ e poiché

$c = 2$ ne consegue che $(1, 3)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ che converge in virtù di Leibniz

Se $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ che converge perchè serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$

da cui, l'intervallo di convergenza è [1, 3].

(caso $x = \frac{7}{3}$)

la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n n^3}$ per il criterio della radice $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{3} < 1$ converge

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 2$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log(x^2 - 2)$$

$f(x) = \log(x^2 - 2) \Rightarrow f(2) = \log 2$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 2} \Rightarrow f'(2) = 2$

$f''(x) = \frac{2(x^2-2) - 2x2x}{(x^2-2)^2} = \frac{2x^2 - 4 - 4x^2}{(x^2-2)^2} = \frac{-2x^2 - 4}{(x^2-2)^2} \Rightarrow f''(2) = -\frac{12}{4} = -3$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = \log 2 + 2(x-2) - \frac{3(x-2)^2}{2!}$



**Riportare solo i passaggi essenziali**

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x-y+z-t=1 \\ x+y-z+t=1 \\ x+y+z+t=2 \\ 3x+y+5z+t=6 \end{cases}$$

(per gli studenti degli anni precedenti studiare il sistema avendo eliminato la quarta equazione e ponendo $t=0$).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-2R_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-3R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ da cui si ottiene}$$

$$\begin{cases} x-y+z-t=1 \\ 2y-2z+2t=0 \\ 2z=1 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+\frac{1}{2}-t=1 \\ y-\frac{1}{2}+t=0 \\ z=\frac{1}{2} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}-t=1 \\ y=\frac{1}{2}-t \\ z=\frac{1}{2} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2}-t \\ z=\frac{1}{2} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione generale $\left(1, \frac{1}{2}-k, \frac{1}{2}, k\right), k \in \mathbb{R}$

(Caso ridotto)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+1-1+1+1=4 \text{ il sistema è a pieno rango ed è crameriano:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1+2+1-2+1+1}{4} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1-1+2-1+2-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2-1+1-1-1+2}{4} = \frac{1}{2}$$