MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I - SESSIONE INVERNALE 2016/17

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

**TEMA A**

**I PARTE**

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = x^2 e^{x^2}$$

C.E. $x \in \mathbb{R}$, la funzione è pari dato che $f(-x) = f(x)$, la studio in $[0, +\infty)$ inoltre $f(0) = 0$

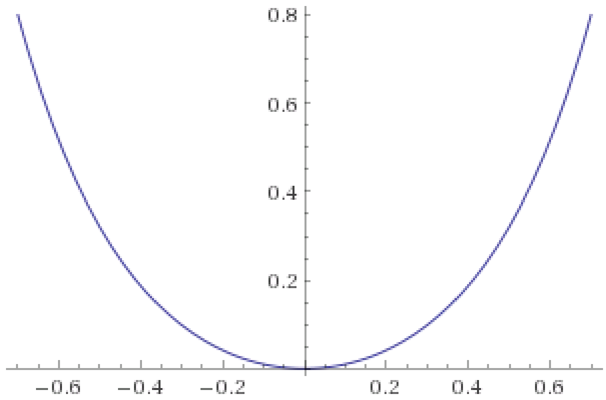
$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{x^2} = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 e^{x^2}}{x} = +\infty$ No as. obliquo/orizzontale

$f'(x) = 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} = 2xe^{x^2}(x^2+1) > 0$ per $x > 0$, $f'(0) = 0$ data la simmetria della funzione $x = 0$ è punto di minimo relativo e anche assoluto.

$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} + 6x^2 e^{x^2} + 4x^4 e^{x^2} = 2e^{x^2}(2x^4 + 5x^2 + 1) \geq 0$ ponendo $t = x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2t^2 + 5t + 1 \geq 0\,;\quad \Delta = 25 - 8 = 17 \text{ da cui } t = \frac{-5 \mp \sqrt{17}}{4} = < \begin{array}{l} \frac{-5-\sqrt{17}}{4} < 0 \ \mathbf{N.A.} \\ \frac{-5+\sqrt{17}}{4} < 0 \ \mathbf{N.A.} \end{array}$$

ossia $f''(x) > 0\ \forall x$




2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(3x+1)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(3x+1)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{3x+1}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{3x+1} = 3$$



<u>**Riportare solo i passaggi essenziali**</u>

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to-\infty} \log\frac{x^2-5x}{1-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log\frac{x^2-5x}{1-x} = \lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{x}{x}\frac{x-5}{\frac{1}{x}-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{x-5}{\frac{1}{x}-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(-\frac{x-5}{1-\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3x+a & \text{se } x \le 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$f(1) = 4 + a = \lim_{x\to 1^+} x = 1 \Rightarrow 4 + a = 1 \Rightarrow a = -3$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

nell'intervallo [-1, 5].

$f(x)$ è continua in $[-1,5]$, inoltre $f(-1) = 8 = f(5)$

$f'(x) = 2x - 4$ evidentemente derivabile in $(-1,5)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$



**Riportare solo i passaggi essenziali**

**II PARTE**

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1/x}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx \text{ ponendo } \ln(x) = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$$

si ha che $x = 1 \Rightarrow t = 0$ mentre se $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = -\ln(2)$

$$\int_{-\ln(2)}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_{-\ln(2)}^{0} = \arcsin 0 - \arcsin(\ln(2)) = -\arcsin(ln(2))$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

poichè $t = \arctan x \Rightarrow dt = \frac{1}{1+x^2}dx$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int t\,dx = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\arctan^2 x}{2} + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \lim_{h\to+\infty} \int_{0}^{h} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \lim_{h\to+\infty} \left[\frac{\arctan^2 x}{2}\right]_0^h = \lim_{h\to+\infty} \frac{\arctan^2 h}{2} - \frac{\arctan^2 0}{2} =$$

$$= \lim_{h\to+\infty} \frac{\arctan^2 h}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2^n + 3^n)x^n$$

Applicando il criterio della radicesi si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \lim_{n\to+\infty} 3 \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 3$

da cui $R = \frac{1}{3}$ e poiché $c = 0$ ne consegue che $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n + 3^n)}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$ che diverge perché il termine generale non è infinitesimo

Se $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n + 3^n)}{3^n}(-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)$ che non converge $> 1$

da cui, l'intervallo di convergenza è $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 2$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log{(x^2 - 2)}$$

$f(x) = \log{(x^2 - 2)} \Rightarrow f(2) = \log 2$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 2} \Rightarrow f'(2) = 2$

$f''(x) = \frac{2(x^2 - 2) - 2x2x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4 - 4x^2}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-2x^2 - 4}{(x^2 - 2)^2} \Rightarrow f''(2) = -\frac{12}{4} = -3$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = \log 2 + 2(x - 2) - \frac{3(x - 2)^2}{2!}$



**Riportare solo i passaggi essenziali**

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - 1 = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione generale $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



**Riportare solo i passaggi essenziali**