MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I - SESSIONE INVERNALE 2016/17

MATR.___________ COGNOME_______________ NOME________________

TEMA B

I PARTE

---

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

C.E. $x \in \mathbb{R}/\{\pm 1\}$, la funzione è pari dato che $f(-x) = f(x)$, la studio in $[0,1) \cup (1, +\infty)$ inoltre $f(0) = 4$, $f(2) = 0$

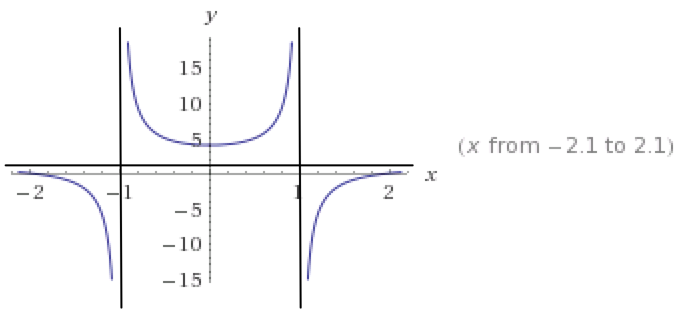
$\lim_{x \to 1^{\mp}} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = \pm\infty$ Asintoto Verticale

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 1$ Asintoto Orizzontale

$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 4)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x}{(x^2 - 1)^2} > 0 \ \forall x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$,

con $f'(x) = 0$ in $x = 0$ minimo locale data la simmetria della funzione.

Dati gli asintoti orizzontali e verticali e lo studio della derivata non si studia la derivata seconda.



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x}}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x}}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{4e^{2x}}{1} = +\infty$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x} = \lim_{x\to 0} e^x \frac{1 - e^x}{x} = \lim_{x\to 0} -e^x \frac{e^x - 1}{x} = -1$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x - k & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 + k & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 2 - k = \lim_{x\to 0^-} -x^2 + k = k \Rightarrow 2 - k = k \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

nell'intervallo [3, 6].

$f(x)$ è continua in $[3, 6]$, inoltre $f(3) = 0$ ed $f(6) = 9$

$f'(x) = 2x - 6$ evidentemente derivabile in $(3, 6)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{9 - 0}{6 - 3} = 2x - 6 \Rightarrow 3 = 2x - 6 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\log 2} \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\,dx$$

Ponendo $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

si ha che $x = \log 2 \Rightarrow t = 2$ e $x = 0 \Rightarrow t = 1$

$$\int_0^{\log 2} \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\,dx = 3\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = 3\int_1^2 \frac{dt}{1+t^2} = 3[\arctan t]_1^2 = 3(\arctan(2) - \arctan(1)) =$$

$$= 3(\arctan(2) - \frac{\pi}{4})$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

ponendo $x - 1 = t \Rightarrow dx = dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dx = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{t} + c = 2\sqrt{x-1} + c$$

da cui, a causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{x-1}\right]_{1+\epsilon}^2 = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2 - 2\sqrt{1+\epsilon-1} = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2 - 2\sqrt{\epsilon} = 2$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n-1)!}$$

Si ricordi che ponendo $t = x^2$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ da cui $R = +\infty$

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 4$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log(x-2)$$

$f(x) = \log(x-2) \Rightarrow f(4) = \log 2$

$f'(x) = \frac{1}{x-2} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow f''(4) = -\frac{1}{4}$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = \log 2 + \frac{1}{2}(x-4) - \frac{(x-4)^2}{8}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} 2x + y & = -1 \\ x + 8y - 5z & = 2 \\ x + 5y - 3z & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-R_3]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-\frac{R_1}{2}]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{15}{2} & -5 & \frac{5}{2} \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+\frac{2R_2}{5}]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{15}{2} & -5 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ \frac{15}{2} y - 5z = \frac{5}{2} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ y = \frac{2}{3} z + \frac{1}{3} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{z}{3} - \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} z + \frac{1}{3} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione generale $\left(-\frac{z}{3} - \frac{2}{3}, \frac{2}{3} z + \frac{1}{3}, z\right)$