MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I - SESSIONE INVERNALE 2016/17

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA C

I PARTE

---

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

C.E. $x \in \mathbb{R}/\{0\}$, la funzione non ha simmetrie rispetto l'origine dato

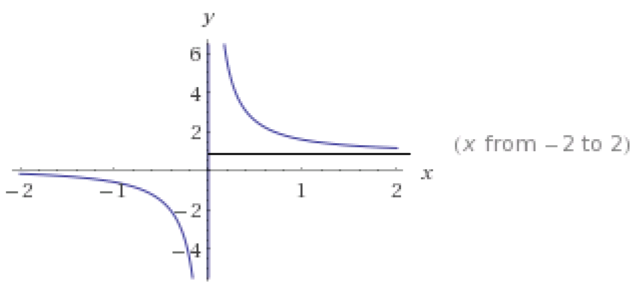
$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$ Asintoto orizzontale

$\lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{e^x}{e^x - 1} = \mp\infty$ Asintoto verticale

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1$ Asintoto orizzontale

$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$ nel suo dominio.

Dati gli asintoti verticali e orizzontali e la derivata prima non si procede allo studio della $f''(x)$



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{e^x - 2 - e^{-x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{e^x - 2 - e^{-x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x + e^{-x}} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{1+x-1}\left(\sqrt{1+x}+1\right)=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)=5\cdot 1\cdot 2=10$$

4) Determinare $b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} be^{2x-2}+x^2+1 & \text{se } x\geq 1\\ -2x+3be^{2x-2} & \text{se } x<1\end{cases}$$

$$f(1)=b+2=\lim_{x\to 1^-}-2x+3be^{2x-2}=-2+3b\Rightarrow b+2=-2+3b\Rightarrow 2b=4\Rightarrow b=2$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

nell'intervallo [1, 4].

$f(x)$ è continua in $[1,4]$, inoltre $f(1)=\frac{1}{5}=f(4)$

$f'(x)=\frac{x^2+4-x(2x)}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$ evidentemente derivabile in $(1,4)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$f'(x)=0\Rightarrow 4-x^2=0\Rightarrow\ x=+2$ Accettabile e $x=-2$ NON Accettabile

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 7x\cos(3x^2)dx$$

Ponendo $3x^2 = t \Rightarrow 6xdx = dt$

si ha che $x = 1 \Rightarrow t = 3$ e $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$$\int_0^1 7x\cos(3x^2-5)dx = \frac{7}{6}\int_0^1 6x\cos(3x^2-5)dx = \frac{7}{6}\int_0^3 \cos t\ dt = \frac{7}{6}[\sin t\,]_0^3 = \frac{7}{6}(\sin(3)-\sin(0)) =$$
$$= \frac{7\sin(3)}{6}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$$

poichè

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \int -\frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{h\to+\infty}\int_1^h \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{h\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^h = \lim_{h\to+\infty} -\frac{\ln(h)}{h} - \frac{1}{h} + 0 + 1 = 1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n(2n-1)}$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n(2n-1)}{(2n+2)(2n+1)} = 1$ da cui $R = 1$ e poiché

$c = 0$ ne consegue che $(-1, 1)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)}$ che converge in virtù di Leibniz

Se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$ che converge in quanto è equivalente alla serie armonica

generalizzata con $n = 4 > 1$

da cui, l'intervallo di convergenza è [-1, 1].

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 3$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log^2(x-2)$$

$f(x) = \log^2(x-2) \Rightarrow f(3) = \log^2 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{2\log(x-2)}{x-2} \Rightarrow f'(3) = 0$

$f''(x) = \dfrac{2\frac{1}{x-2}(x-2) - 2\log(x-2)}{(x-2)^2} = \dfrac{2 - 2\log(x-2)}{(x-2)^2} \Rightarrow f''(3) = 2$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = (x-3)^2$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} -x+y+z & =-1 \\ x-y & =-1 \\ x+2y-2z & =\ \ 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2+R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \downharpoonleft\upharpoonright R_3]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} -x+y+z=-1 \\ 3y-z=-1 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}$$

Soluzione generale $(-2,-1\,,-2)$