MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I - SESSIONE INVERNALE 2016/17

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA D

I PARTE

1) Studiare la funzione:

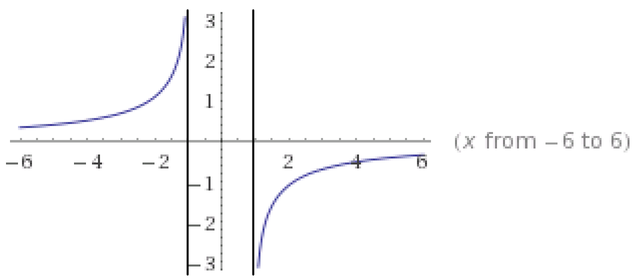
$$f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

C. E. $\frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \; x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, inoltre $f(-x) = \log\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = \log\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) =$
$= \log\left(-\frac{x+1}{-x+1}\right) = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$ si tratta di una funzione dispari
la studiamo in $(1, +\infty)$

$\lim_{x \to 1^+} \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$ Asintoto Verticale dx

$\lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ Asintoto Orizzontale

$f'(x) = \frac{x+1}{x-1}\frac{x-1-(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{2}{(x-1)(x+1)} < 0$ per $x > 1$, data la simmetria della funzione la $f'(x)$ e gli asintoti non si procede al calcolo della $f''(x)$



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(3x)}{5e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(3x)}{5e^{\frac{1}{x}}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{3}{3x}}{5e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{x}}{5e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x}{5e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+1-x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+1/x}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{4}{2}=2$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x+4}+2 & \text{se} -4 \le x < 0 \\ \ln(ax+1)+3a & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

$$f(0)=3a=\lim_{x\to 0^-} a\sqrt{x+4}+2=2a+2 \Rightarrow 2a+2=3a \Rightarrow a=2$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x)=(2x-3)^3$$

nell'intervallo $\left[0,\frac{3}{2}\right]$

$f(x)$ è continua in $\left[0,\frac{3}{2}\right]$, inoltre $f(0)=-27$; $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$

$f'(x)=3(2x-3)^2$ evidentemente derivabile in $\left(0,\frac{3}{2}\right)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{0-(-27)}{\frac{3}{2}-0}=3(2x-3)^2 \Rightarrow 27\frac{2}{3}=3(2x-3)^2 \Rightarrow 18=3(2x-3)^2 \Rightarrow (2x-3)^2=6 \Rightarrow 2x-3=\mp\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2x=3\mp\sqrt{3} \Rightarrow x=< \begin{matrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \cong 0.63 \quad \text{ACCETTABILE} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \cong 2.37 \text{ NON ACCETTABILE} \end{matrix}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^e x\log^2 x\ dx$$

Si procede per parti

$$\int x\log^2(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \int \frac{x^2}{2}2\log(x)\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \int x\log(x)\ dx\ =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \left(\frac{x^2}{2}\log(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\ dx\right) = \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \frac{x^2}{2}\log(x) + \frac{1}{2}\int x dx\ \ =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log^2(x) - \frac{x^2}{2}\log(x) + \frac{x^2}{4} + c$$

da cui

$$\int_1^e x\log^2 x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\log^2(x) - \frac{x^2}{2}\log(x) + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

ponendo $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c = \arctan e^x + c$$

da cui, a causa dell'estremo inferiore di integrazione:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \lim_{h\to-\infty}\int_h^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \lim_{h\to-\infty}[\arctan e^x]_h^0 =$$

$$= \lim_{h\to-\infty} \arctan e^0 - \arctan e^h = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 1$ da cui $R = 1$ e poiché

$c = 2$ ne consegue che $(1, 3)$ è l'intervallo di convergenza.

Valutiamo il comportamento agli estremi

Se $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ che converge in virtù di Leibniz

Se $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ che converge perchè serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$

da cui, l'intervallo di convergenza è [1, 3].

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 2$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log(x^2)$$

$f(x) = \log(x^2) \Rightarrow f(2) = \log 4$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow f'(2) = 1$

$f''(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow f''(2) = -\frac{1}{2}$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = \log 4 + (x-2) - \frac{(x-2)^2}{4}$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y - z & = 0 \\ 3x + y + 2z & = 0 \\ 4x + z & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{4}z - z = 0 \\ y = -\frac{5}{4}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4}z \\ y = -\frac{5}{4}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione generale $\left(-\frac{1}{4}z, -\frac{5}{4}z\,, z\right)$

Riportare solo i passaggi essenziali