MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I - SESSIONE INVERNALE 2016/17

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA E

I PARTE

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

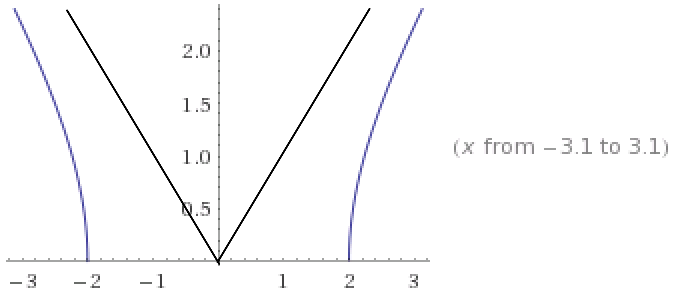
C.E. $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, la funzione è pari dato che $f(-x) = f(x)$, la studio in $[2, +\infty)$ inoltre $f(2) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4} = +\infty;\ m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}} = 1;\ q = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4} - x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4+x^2}{\sqrt{x^2-4}+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x^2} = 0 \text{ da cui si evince l'asintoto obliquo } y = x$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \text{ con } Df'(x) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Si vede subito che per $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$ inoltre $\lim_{x\to2^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty$ ossia in 2^+ la $f(x)$ si comporta come una cuspide, possiamo evitare di studiare la $f''(x)$



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos^3(x)}{x^3-x^2}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos^3(x)}{x^3-x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{-3\cos^2(x)(-\sin(x))}{3x^2-2x} = \lim_{x\to0} \frac{3\cos^2(x)}{3x-2} \frac{\sin x}{x} = -\frac{3}{2}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9} = \lim_{x \to -3^+} \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)^2} = \lim_{x \to -3^+} \frac{\overbrace{(x+2)}^{\to -1}}{\underbrace{(x+3)}_{\to 0^+}} = -\infty$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (2-k)x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ x-k & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 1 = \lim_{x \to 0^+} x - k = -k \Rightarrow -k = 1 \Rightarrow k = -1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = 2x^4 + 5x^2 + 4$$

nell'intervallo $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

$f(x)$ è continua in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, inoltre $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3})$

$f'(x) = 8x^3 + 10x$ evidentemente derivabile in $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 8x^3 + 10x = 0 \Rightarrow x(8x^2+10) = 0$ con l'uni casoluzione possibile $x = 0$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \tan(x)\, dx$$

$$\int_0^1 \tan(x)\, dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\int_0^1 \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx \qquad \text{ponendo } t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)\, dx$$

si ha che $x = 1 \Rightarrow t = \cos 1$ e $x = 0 \Rightarrow t = 1$

$$\int_0^1 \tan(x)\, dx = -\int_1^{\cos 1} \frac{1}{t} dt = [\log|t|]_1^{\cos 1} = -\ln(\cos 1) + \ln 1 = -\ln(\cos 1)$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore (porre $-2x = t$) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{e^{2x}} dx$$

poichè $-2dx = dt$

$$\int \frac{2}{e^{2x}} dx = -\int 2e^{-2x} dt = -\int e^t dt = -e^t + c = -e^{-2x} + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{e^{2x}} dx = \lim_{h\to+\infty} \int_0^h \frac{2}{e^{2x}} dx = \lim_{h\to+\infty} [-e^{-2x}]_0^h = \lim_{h\to+\infty} -e^{-2h} + e^0 = 1$$

<u>**Riportare solo i passaggi essenziali**</u>

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(x+2)^n}{2^n+1}$$

Il centro della serie è *c* = -2. Analizziamo il termine generale della serie, con il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{n}{1+\frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{2} \text{ converge con } R = 2 \; e \; c = -2$$

quindi l'intervallo di convergenza è tutto $(-4, 0)$. Agli estremi non converge dato che per

$x = 0)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{2^n+1}$ ha termine generale divergente $\frac{n2^n}{2^n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$

$x = -4)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^n 2^n}{2^n+1}$ ha termine generale divergente $\frac{n(-1)^n 2^n}{2^n+1}$ indeterminato

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 1$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log(1/x)$$

$f(x) = \log(1/x) \Rightarrow f(1) = \log\left(\frac{1}{1}\right) = -\log 1 = 0$

$f'(x) = -\frac{x}{x^2} = -\frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = -1$

$f''(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = 1$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = -\frac{(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^2}{6}$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} 2x + y & = & 1 \\ x + 2y & = & 2 \\ 5x - y & = & -1 \end{cases}$$

Soluzione generale $(0, 1)$

<u>Riportare solo i passaggi essenziali</u>