MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) I - SESSIONE INVERNALE 2016/17

MATR.___________ COGNOME_______________ NOME________________

TEMA F

I PARTE

1) Studiare la funzione:

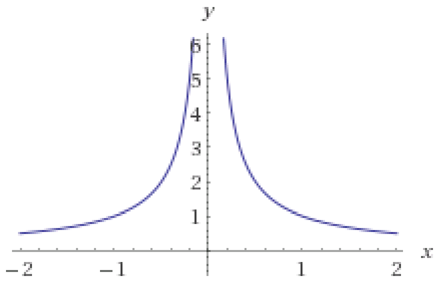
$$f(x) = \frac{|x|}{x^2}$$

C.E. $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, la funzione è pari dato che $f(-x) = f(x)$, la studio in $(0, +\infty)$ valendo $f(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ asintoto verticale

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ asintoto orizzontale

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ per $x > 0$, data la simmetria della funzione non procedo al calcolo di $f''(x)$



(x from −2 to 2)

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2(x)}{2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2(x)}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log(x)\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+1}{x-1}} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2}{x}\frac{1+1/x^2}{1-1/x}} \lim_{x\to-\infty} e^{x\frac{1+1/x^2}{1-1/x}} = 0$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \ln(ax) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 0 = \lim_{x\to1^+} \ln(ax) = \ln(a) \Rightarrow \ln(a) = 0 \Rightarrow a = 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

$f(x)$ è continua in $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, inoltre $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4;\quad f(2) = 1$

$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ evidentemente derivabile in $(\frac{1}{2}, 2)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$$\frac{1-4}{2-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow -\frac{3}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow \frac{2}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ NON ACCETTABILE e } x = 1 \text{ ACCETTABILE}$$

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^5 - x^4}{x - 1} dx$$

Poiché $\dfrac{x^5 - x^4}{x - 1} = \dfrac{x^4(x-1)}{x - 1} = x^4$

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^5 - x^4}{x^2 - 1} dx = \int_{-1}^{0} x^4 \, dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{5}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore (porre $t = x - 2$):

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

ponendo $t = x - 2 \Rightarrow dt = dx$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{h \to +\infty} \int_{3}^{h} \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{h \to +\infty} \left[-\frac{1}{x-2}\right]_{3}^{h} = \lim_{h \to +\infty} -\frac{1}{h-2} + 1 = 1$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n x^n$$

Criterio della radice: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}-1 = 0$ da cui $R = +\infty$

La serie, centrata in $c = 0$, ha come l'intervallo di convergenza tutto l'asse dei numeri reali.

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 3$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log(4-x)$$

$f(x) = \log(4-x) \Rightarrow f(3) = 0$

$f'(x) = -\frac{1}{4-x} \Rightarrow f'(3) = -1$

$f''(x) = \frac{-1}{(4-x)^2} \Rightarrow f''(3) = -1$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = -(x-3) \qquad - \frac{(x-3)^2}{2}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z & = 2 \\ x + 2y - z & = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{R_3}{3}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - \frac{2}{3}z = \frac{1}{3} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} - \frac{z}{3} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione generale $\left(\frac{7}{3} - \frac{z}{3}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z, z\right)$

Riportare solo i passaggi essenziali