MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II - SESSIONE INVERNALE 2016/17

MATR.___________ COGNOME________________ NOME_________________

TEMA A

I PARTE

1) Studiare la funzione:

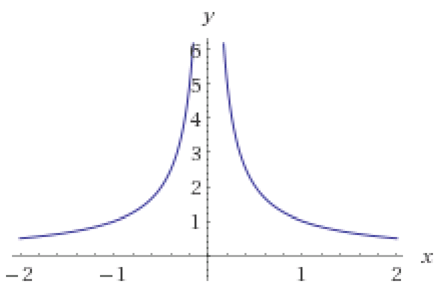
$$f(x) = \frac{|x|}{x^2}$$

C.E. $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, la funzione è pari dato che $f(-x) = f(x)$, la studio in $(0, +\infty)$ valendo $f(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ asintoto verticale

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ asintoto orizzontale

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ per $x > 0$, data la simmetria della funzione non procedo al calcolo di $f''(x)$



(x from −2 to 2)

2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2e^{2x}}{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2e^{2x}}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{4e^{2x}}{1} = +\infty$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+1}{x-1}} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2}{x}\frac{1+1/x^2}{1-1/x}} \lim_{x\to-\infty} e^{x\frac{1+1/x^2}{1-1/x}} = 0$$

4) Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x - k & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 + k & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 2 - k = \lim_{x\to0^-} -x^2 + k = k \Rightarrow 2 - k = k \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = 2x^4 + 5x^2 + 4$$

nell'intervallo $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

$f(x)$ è continua in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, inoltre $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3})$

$f'(x) = 8x^3 + 10x$ evidentemente derivabile in $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 8x^3 + 10x = 0 \Rightarrow x(8x^2 + 10) = 0$ con l'uni casoluzione possibile $x = 0$

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\log 2} \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\,dx$$

Ponendo $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

si ha che $x = \log 2 \Rightarrow t = 2$ e $x = 0 \Rightarrow t = 1$

$$\int_0^{\log 2} \frac{3e^x}{1+e^{2x}}\,dx = 3\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = 3\int_1^2 \frac{dt}{1+t^2} = 3[\arctan t]_1^2 = 3(\arctan(2) - \arctan(1)) =$$

$$= 3(\arctan(2) - \frac{\pi}{4})$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore (porre $t = x - 2$):

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

ponendo $t = x - 2 \Rightarrow dt = dx$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{h\to+\infty} \int_3^h \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{h\to+\infty} \left[-\frac{1}{x-2}\right]_3^h = \lim_{h\to+\infty} -\frac{1}{h-2} + 1 = 1$$

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n x^n$$

Criterio della radice: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0$ da cui $R = +\infty$

La serie, centrata in $c = 0$, ha come l'intervallo di convergenza tutto l'asse dei numeri reali.

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 3$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log^2(x-2)$$

$f(x) = \log^2(x-2) \Rightarrow f(3) = \log^2 1 = 0$

$f'(x) = \frac{2\log(x-2)}{x-2} \Rightarrow f'(3) = 0$

$f''(x) = \frac{2\frac{1}{x-2}(x-2) - 2\log(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{2 - 2\log(x-2)}{(x-2)^2} \Rightarrow f''(3) = 2$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = (x-3)^2$

Riportare solo i passaggi essenziali

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y - z & = 0 \\ 3x + y + 2z & = 0 \\ 4x + z & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{4}z - z = 0 \\ y = -\frac{5}{4}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4}z \\ y = -\frac{5}{4}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione generale $\left(-\frac{1}{4}z, -\frac{5}{4}z\,, z\right)$

Riportare solo i passaggi essenziali