MATEMATICA GENERALE (V. Lacagnina) II - SESSIONE INVERNALE 2016/17

MATR.__________ COGNOME______________ NOME_______________

TEMA B

I PARTE

1) Studiare la funzione:

$$f(x) = x^2 e^{x^2}$$

C.E. $x \in \mathbb{R}$, la funzione è pari dato che $f(-x) = f(x)$, la studio in $[0, +\infty)$ inoltre $f(0) = 0$

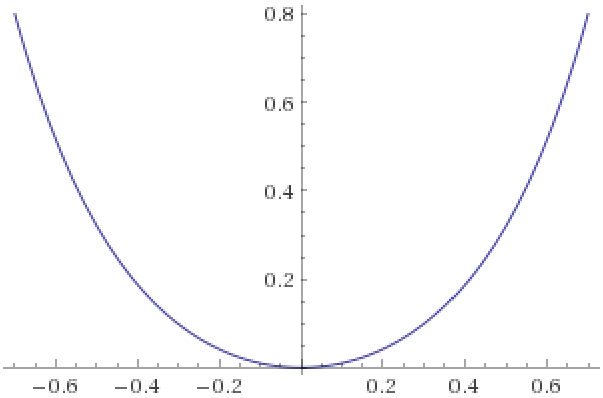
$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{x^2} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{x^2}}{x} = +\infty$ No as. obliquo/orizzontale

$f'(x) = 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} = 2xe^{x^2}(x^2+1) > 0$ per $x > 0, f'(0) = 0$ data la simmetria della funzione $x = 0$ è punto di minimo relativo e anche assoluto.

$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} + 6x^2 e^{x^2} + 4x^4 e^{x^2} = 2e^{x^2}(2x^4 + 5x^2 + 1) \geq 0$ ponendo $t = x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2t^2 + 5t + 1 \geq 0\,;\quad \Delta = 25 - 8 = 17 \text{ da cui } t = \frac{-5 \mp \sqrt{17}}{4} =< \begin{matrix} \frac{-5-\sqrt{17}}{4} < 0 \ \textbf{N.A.} \\ \frac{-5+\sqrt{17}}{4} < 0 \ \textbf{N.A.} \end{matrix}$$

ossia $f''(x) > 0 \ \forall x$



2) Dopo averlo ricondotto ad una forma utilizzabile, calcolare il seguente limite tramite de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{e^x - 2 - e^{-x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{e^x - 2 - e^{-x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x + e^{-x}} = 0$$

Riportare solo i passaggi essenziali

3) Calcolare il seguente limite senza utilizzare de l'Hopital:

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$$

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x+3)(x+2)}{(x+3)^2} = \lim_{x\to -3^+} \frac{\overbrace{(x+2)}^{\to -1}}{\underbrace{(x+3)}_{\to 0^+}} = -\infty$$

4) Determinare $b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f(x)$ sia continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} be^{2x-2} + x^2 + 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x + 3be^{2x-2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$f(1) = b + 2 = \lim_{x\to 1^-} -2x + 3be^{2x-2} = -2 + 3b \Rightarrow b + 2 = -2 + 3b \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$

5) Dopo aver controllato le ipotesi, se possibile, si applichi il teorema di Rolle alla funzione

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

nell'intervallo [-1, 5].

$f(x)$ è continua in $[-1, 5]$, inoltre $f(-1) = 8 = f(5)$

$f'(x) = 2x - 4$ evidentemente derivabile in $(-1, 5)$

Tutte le ipotesi del teorema sono verificate. Applichiamo la tesi:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Riportare solo i passaggi essenziali

II PARTE

6) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 7x\cos(3x^2)dx$$

Ponendo $3x^2 = t \Rightarrow 6xdx = dt$

si ha che $x = 1 \Rightarrow t = 3$ e $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$$\int_0^1 7x\cos(3x^2-5)dx = \frac{7}{6}\int_0^1 6x\cos(3x^2-5)dx = \frac{7}{6}\int_0^3 \cos t\ dt = \frac{7}{6}[\sin t]_0^3 = \frac{7}{6}(\sin(3)-\sin(0)) =$$
$$= \frac{7\sin(3)}{6}$$

7) Calcolare l'integrale improprio e, se converge, calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$$

poichè $t = \arctan x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{1+x^2}dx$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int t\ dx = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\arctan^2 x}{2} + c$$

da cui, a causa dell'estremo superiore di integrazione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \lim_{h\to+\infty}\int_0^h \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \lim_{h\to+\infty}\left[\frac{\arctan^2 x}{2}\right]_0^h = \lim_{h\to+\infty}\frac{\arctan^2 h}{2} - \frac{\arctan^2 0}{2} =$$
$$= \lim_{h\to+\infty}\frac{\arctan^2 h}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Riportare solo i passaggi essenziali

8) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(x+2)^n}{2^n+1}$$

Il centro della serie è c = -2. Analizziamo il termine generale della serie, con il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{n}{1+\frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{2} \text{ converge con } R = 2 \ e \ c = -2$$

quindi l'intervallo di convergenza è tutto $(-4, 0)$. Agli estremi non converge dato che per

$x = 0)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{2^n+1}$ ha termine generale divergente $\displaystyle\frac{n2^n}{2^n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$

$x = -4)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^n 2^n}{2^n+1}$ ha termine generale divergente $\displaystyle\frac{n(-1)^n 2^n}{2^n+1}$ indeterminato

9) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato su $x = 4$, della seguente funzione:

$$f(x) = \log(x-2)$$

$f(x) = \log(x-2) \Rightarrow f(4) = \log 2$

$f'(x) = \dfrac{1}{x-2} \Rightarrow f'(4) = \dfrac{1}{2}$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow f''(4) = -\dfrac{1}{4}$

E il polinomio risultante è: $P^2(x) = \log 2 + \dfrac{1}{2}(x-4) - \dfrac{(x-4)^2}{8}$

10) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari ed eventualmente trovare la/le soluzione/i:

$$\begin{cases} x - y + z & = 2 \\ x + 2y - z & = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{R_3}{3}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - \frac{2}{3}z = \frac{1}{3} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} - \frac{z}{3} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione generale $\left(\frac{7}{3} - \frac{z}{3}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}z, z\right)$